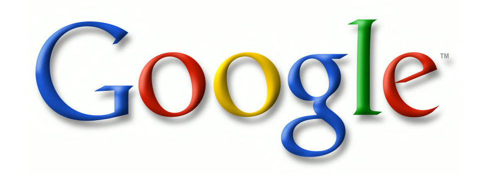
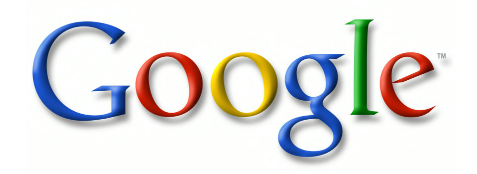





HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE
RI
TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE

Bestimmung der

Viergliedrigen Gruppen des Raumes (x y z).

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen Philosophischen Facultät

der

Universität Leipzig

vorgelegt

von

Richard Koch

aus Leipzig.

Berlin 1898.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke)

Linienstrasse 158.

Einleitung.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist, die viergliedrigen continuirlichen Gruppen des Raumes (xyz) zu bestimmen. Diese Aufgabe ist ein ganz specieller Teil des allgemeineren Problems, alle endlichen continuirlichen Gruppen des gewöhnlichen Raumes zu bestimmen, das von Lie bereits erledigt ist. Lie, Norwegisches Archiv, Bd. IX, 1884, Theorie der Transformationsgruppen; Band III. S. 122 ff. Es ist daher höchstens die verschiedene Betrachtungsweise, die die Behandlung der vorliegenden Arbeit rechtfertigt. — Zwei Begriffe sind nämlich für die Auffindung von endlichen continuirlichen Gruppen wertvoll: die Begriffe der Zusammensetzung und der Ähnlichkeit. Denn um alle r-gliedrigen continuirlichen Gruppen eines n-fach ausgedehnten Raumes aufzustellen (die Zahl der Veränderlichen spielt übrigens keine Rolle bei der Zusammensetzung), kann man zunächst so verfahren, dass man alle wesentlichen Typen von r-gliedrigen Zusammensetzungen bestimmt. Diese Aufgabe führte Lie bereits im Jahre 1874 für die Gruppen mit weniger als 7 Parametern vollständig durch. Für die viergliedrigen Gruppen ergeben sich vierzehn wesentliche Zusammensetzungen. Lie, Cont. Gruppen, Kap. XX. § 3—5. Um nun wirklich die innerhalb jeder Zusammensetzung wesentlich verschiedenen Gruppen zu finden, dazu dient der Satz von der Ähnlichkeit zweier r-gliedriger Gruppen. Lie, Math. Annalen. XXV. 1885. S. 105. „Sollen zwei r-gliedrige Gruppen zwischen ν Variabeln

$$B_1 f \ldots B_r f, \quad (y_1 \ldots y_\nu)$$
$$B_1' f \ldots B_r' f, \quad (y_1' \ldots y_\nu')$$

vermöge einer Punkttransformation $y_x' = F_x(y_1 \ldots y_\nu)$ ähnlich sein, so ist zunächst notwendig, dass beide Gruppen gleich

zusammengesetzt sind, dass man also die $B_\varkappa'f$ in solcher Weise wählen kann, dass gleichzeitig

$$(B_i, B_\varkappa) = \Sigma c_{i\varkappa s} B_s \text{ und } (B_i', B_\varkappa') = \Sigma c_{i\varkappa s} B_s'$$

wird. Ist diese Forderung erfüllt und bestehen ferner die Relationen

$$B_{n+\varkappa} = \varphi_{\varkappa 1} B_1 + \varphi_{\varkappa 2} B_2 + \ldots + \varphi_{\varkappa n} B_n \quad (\varkappa = 1 \ldots r-n)$$

während $B_1, B_2, \ldots B_n$ nicht durch eine lineare Relation verknüpft sind, so müssen analoge Relationen

$$B'_{n+\varkappa} = \varphi'_{\varkappa 1} B'_1 + \varphi'_{\varkappa 2} B'_2 + \ldots + \varphi'_{\varkappa n} B'_n$$

stattfinden, während auch $B_1' \ldots B_n'$ keine lineare Gleichung befriedigen. Endlich dürfen die $n(r-n)$-Gleichungen $\varphi_{\varkappa i} = \varphi'_{\varkappa i}$ nicht contradictorisch sein. Diese notwendigen Criterien sind gleichzeitig hinreichend."

„Diesen Satz kann man nun, wenn die Zusammensetzungen bekannt sind, zum Ausgangspunkt für die Aufsuchung der endlichen contin. Gruppen wählen. Es sei z. B. die Gruppe vorgelegt B_1, B_2, B_3 und es mögen die Relationen bestehen:

$$(B_1, B_2) = B_1, \quad (B_1, B_3) = 2B_2, \quad (B_2, B_3) = B_3, \quad B_3 = \varphi_1 B_1 + \varphi_2 B_2.$$

φ_1 und φ_2 bezeichnen gewisse Functionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$; B_1 und B_2 genügen keiner linearen Relation. Es sind nun zwei Fälle denkbar: φ_1 und φ_2 sind entweder unabhängig von einander oder sie sind durch eine Relation verknüpft. Nehmen wir an, dass $\varphi_2 = \Omega(\varphi_1)$ ist, so ist die Function Ω vollständig bestimmt. Wir erhalten nämlich die Gleichungen:

$$(B_1, B_3) = B_1\varphi_1 . B_1 + B_1\varphi_2 . B_2 + \varphi_2 B_1 = 2B_2,$$
$$(B_2, B_3) = B_2\varphi_1 . B_1 + B_2\varphi_2 . B_2 - \varphi_1 B_1 = B_3 = \varphi_1 B_1 + \varphi_2 B_2,$$

aus denen folgt:

$$B_1\varphi_1 + \varphi_2 = 0, \quad B_1\varphi_2 = 2, \quad B_2\varphi_1 = 2\varphi_1, \quad B_2\varphi_2 = \varphi_2,$$

oder wenn wir $\varphi_2 = \Omega(\varphi_1)$ einsetzen und $B_1\varphi_1$, $B_2\varphi_1$ wegschaffen:

$$-\Omega\Omega' = 2, \quad 2\varphi_1\Omega' = \Omega.$$

Also hat Ω die Form

$$\Omega = \sqrt{-4\varphi_1} = \varphi_2.$$

Hieraus folgt, dass alle dreigliedrige Gruppen eines n-fach ausgedehnten Raumes, welche den oben gemachten Voraussetzungen genügen, ähnlich sind.“ — Unter allen diesen ähnlichen Gruppen ist nun eine durch eine besonders einfache Form ausgezeichnet, die wir als Repräsentantin aller dieser ähnlichen Gruppen betrachten können. Diese Gruppe erhalten wir, wenn wir gewisse passend gewählte Functionen, die aber stets unabhängig von einander sein müssen, als neue Veränderliche einführen. — Gemäss der Einteilung der Gruppen in integrable Gruppen mit oder ohne dreigliedrige Involutionsgruppen und in nicht integrable Gruppen haben wir 3 Abschnitte:

1. Bestimmung aller integrablen viergliedrigen Gruppen in drei Veränderlichen mit dreigliedriger Involutionsgruppe.
2. Bestimmung aller integrablen viergliedrigen Gruppen in drei Veränderlichen ohne dreigliedrige Involutionsgruppe.
3. Bestimmung aller nicht integrablen viergliedrigen Gruppen in drei Veränderlichen.

1. Abschnitt.

Bestimmung aller integrabeln viergliedrigen Gruppen in drei Veränderlichen mit dreigliedriger Involutionsgruppe.

I. $(X_1 X_2) = 0$, $(X_1 X_3) = 0$, $(X_2 X_3) = 0$, $(X_1 X_4) = \alpha X_1 f$, $(X_2 X_4) = \beta X_2 f$, $(X_3 X_4) = \gamma X_3 f$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

A. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0$, $\mu_i = \mu_i\,(xyz)$

d. h. die drei infinitesimalen Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, die eine dreigliedrige invariante Untergruppe bilden, seien durch keine lineare Relation verbunden; da jedoch zwischen vier infinitesimalen Transformationen des Raumes (xyz) $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ stets eine Gleichung

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \lambda_3 X_3 f + \lambda_4 X_4 f = 0$$

identisch besteht für alle Werte von x, y, z und f, so muss

$$X_4 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f + \varphi_3 X_3 f$$

sein. Bilden wir die Klammerausdrücke $(X_1\ X_4) = \alpha X_1 f \ldots$ so kommt:

$$(X_1 X_4) \equiv X_1 \varphi_1 X_1 f + X_1 \varphi_2 X_2 f + \varphi_2 (X_1 X_2) + X_1 \varphi_3 X_3 f + \varphi_3 (X_1 X_3) = \alpha X_1 f,$$
$$(X_2 X_4) \equiv X_2 \varphi_1 X_1 f - \varphi_1 (X_1 X_2) + X_2 \varphi_2 X_2 f + X_2 \varphi_3 X_3 f + \varphi_3 (X_2 X_3) = \beta X_2 f,$$
$$(X_3 X_4) \equiv X_3 \varphi_1 X_1 f - \varphi_1 (X_1 X_3) + X_3 \varphi_2 X_2 f - \varphi_2 (X_2 X_3) + X_3 \varphi_3 X_3 f = \gamma X_3 f.$$

Berücksichtigen wir obige Zusammensetzung und dass nach A. keine lineare Relation zwischen $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ besteht, so erhalten wir für die $X_1 \varphi_\varkappa$ $(i, \varkappa = 1, 2, 3)$ die Werte:

$$\begin{array}{lll} X_1 \varphi_1 = \alpha, & X_1 \varphi_2 = 0, & X_1 \varphi_3 = 0, \\ X_2 \varphi_1 = 0, & X_2 \varphi_2 = \beta, & X_2 \varphi_3 = 0, \\ X_3 \varphi_1 = 0, & X_3 \varphi_2 = 0, & X_3 \varphi_3 = \gamma. \end{array}$$

Zunächst setzen wir noch voraus, dass keine der Zahlen α, β, γ verschwinde.

Dass dann die Functionen $\varphi_1(xyz)$, $\varphi_2(xyz)$, $\varphi_3(xyz)$ durch keine Relation verbunden sind, können wir leicht einsehen. Gesetzt, es sei

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$$

dann müsste auch sein:

$$X_1\Omega = 0, \quad X_2\Omega = 0, \quad X_3\Omega = 0.$$

Durch Ausführung erhalten wir drei homogene lineare Gleichungen in $\Omega_{\varphi 1}$, $\Omega_{\varphi 2}$, $\Omega_{\varphi 3}$, es muss demnach, da die partiellen Ableitungen von Ω nach φ_1, φ_2, φ_3 nicht sämtlich Null sein können, die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

verschwinden, was im Widerspruch mit unserer Voraussetzung ist. φ_1, φ_2, φ_3, sind also unabhängig von einander, wir können deshalb φ_1 als x_1, φ_2 als y_1, φ_3 als z_1 einführen. Durch Ausführung dieser Operation wird

$$X_i f = X_i\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_i\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + X_i\varphi_3 \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

also:

$$X_1 f = \alpha p_1, \; X_2 f = \beta q_1, \; X_3 f = \gamma r_1, \; X_4 f = \alpha x_1 p_1 + \beta y_1 q_1 + \gamma z_1 r_1.$$

Anstatt

$$X_1 f = \alpha p, \; X_2 f = \beta q, \; X_3 f = \gamma r$$

können wir als neue $X_i'f$ einführen

$$X_1'f = p = 1/\alpha X_1 f, \; X_2'f = q = 1/\beta X_2 f, \; X_3'f = r = 1/\gamma X_3 f,$$

sodass unsre Gruppe schliesslich die Form erhält

$$\boxed{p, \; q, \; r, \; \alpha x p + \beta y q + \gamma z r.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$

Die Klammerrelationen $(X_1X_3) = (X_2X_3) = 0$ liefern unter Berücksichtigung von

$$\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0$$

folgende Werte:

$$X_1\varphi_1 = 0, \quad X_1\varphi_2 = 0,$$
$$X_2\varphi_1 = 0, \quad X_2\varphi_2 = 0.$$

Zunächst ist klar, dass φ_1 u. φ_2 nicht beide const. sein dürfen, denn sonst wäre ja

$$X_3 f = c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$$

d. h. die vier infinitesimalen Tranformationen $X_i f$ wären nicht unabhängig von einander.

α) Nehmen wir daher an, dass sie beide nicht const. sind; dann muss aber

$$\varphi_2 = \psi(\varphi_1)$$

sein, da $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ nur eine gemeinsame Lösung haben. Wir führen φ_1 als neues z_1 ein, während wir x_1 u. y_1 so bestimmen können, dass

$$X_1 x_1 = 1, \quad X_1 y_1 = 0,$$
$$X_2 x_1 = 0, \quad X_2 y_1 = 1$$

wird. x_1, y_1, z_1 sind sicher unabhängig von einander. Bei Einführung dieser Veränderlichen erhält man

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zp + \psi(z) q.$$

α_a) $X_4 f$ sei zunächst durch keine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_2 f$ verbunden, sondern habe die allgemeine Form

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \text{wo } \zeta \neq 0.$$

Die Klammerrelationen liefern:

$$(X_1 X_4) = \xi_x p + \eta_x q + \zeta_x r = \alpha p,$$
$$(X_2 X_4) = \xi_y p + \eta_y q + \zeta_y r = \beta q,$$
$$(X_3 X_4) = (z\xi_x + \psi\xi_y - \zeta) p + (z\eta_x + \psi\eta_y - \zeta\psi') q + (z\zeta_x + \psi\zeta_y) r = \gamma (zp + \psi(z) q).$$

Hieraus folgt:

$$\xi = \alpha x + \xi(z), \quad \eta = \beta y + \eta(z), \quad \zeta = (\alpha - \gamma) z, \quad \psi = \varkappa z^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}$$

und dementsprechend haben unsre infinitesimalen Transformationen die Form:

$$p, \; q, \; zp + \varkappa z^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}} q, \; (\alpha x + \xi(z)) p + (\beta y + \eta(z)) q + (\alpha - \gamma) z r.$$

Die hier auftretenden willkürlichen Funktionen von z können wir durch folgende Variabelnänderung beseitigen:

$$x_1 = x + \varrho(z), \quad y_1 = y + \sigma(z), \quad z_1 = z,$$

wobei $\rho(z)$ u. $\sigma(z)$ durch die Differentialgleichungen

$$\xi(z) + (\alpha - \gamma) z \varrho' - \alpha \varrho = 0,$$
$$\eta(z) + (\alpha - \gamma) z \sigma' - \beta \sigma = 0$$

bestimmt sind. Bei Benutzung der so bis auf Constanten bestimmten x_1, y_1, z_1, erhält man

$$p, \; q, \; zp + \varkappa z^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}} q, \quad \alpha x p + \beta y q + (\alpha - \gamma) z r.$$

Es fragt sich, ob sich $\varkappa$, wenn es nicht Null ist, spezialisieren lässt. Ist $\varkappa = 0$, so haben wir den Typus

$$\boxed{p, \; q, \; zp, \; \alpha x p + \beta y q + (\alpha - \gamma) z r.}$$

Ist $\varkappa \neq 0$, so führen wir neue Veränderliche ein

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = cz.$$

$X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$ bewahren dabei ihre Form, während $X_3 f$ in

$$X_3' f = \frac{z_1}{c} p_1 + \frac{\varkappa z_1^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}}{c^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}} q_1$$

übergeht. Bestimmen wir die Constante c so, dass

$$c^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}} : c = \varkappa$$

wird, so nimmt unsre Gruppe die Form an

$$\boxed{p, \; q, \; zp + z^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}} q, \quad \alpha x p + \beta y q + (\alpha - \gamma) z r.}$$

α_b) Die Annahme

$$X_4 f = \eta_1 X_1 f + \eta_2 X_2 f$$

führt vermöge der Klammerrelationen zu der Forderung

$$\alpha = \beta = \gamma$$

was aber wider die Voraussetzung ist.

β) Da die Indices 1 und 2 gleichberechtigt sind, so brauchen wir in dem Falle, dass eine der Grössen φ_1, φ_2 constant ist, nur die eine Möglichkeit, etwa $\varphi_1 = \text{const.}$ zu berücksichtigen. Wir setzen also:

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \varphi_2 \neq \text{const.}$$

Analog wie in Fall α) erhalten wir durch Einführung neuer Veränderlicher

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \text{const.}\, p + zq$$

oder einfacher

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zq.$$

$X_4 f$ hat auch hier die Form

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \zeta \neq 0.$$

Die Klammerrelationen liefern

$$(X_1 X_4) = \xi_x p + \eta_x q + \zeta_x r = \alpha p.$$
$$(X_2 X_4) = \xi_y p + \eta_y q + \zeta_y r = \beta q.$$
$$(X_3 X_4) = z\xi_y p + (z\eta_y - \zeta) q + z\zeta_y r = \gamma z q,$$

also:

$$\xi = \alpha x + \xi(z), \quad \eta = \beta y + \eta(z), \quad \zeta = (\beta - \gamma) z.$$
$$X_4 f = (\alpha x + \xi(z)) p + (\beta y + \eta(z)) q + (\beta - \gamma) z r.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$x_1 = x + \varrho(z), \quad y_1 = y + \sigma(z), \quad z_1 = z,$$

wobei $\rho(z)$ u. $\sigma(z)$ durch die Diffgleichungen

$$\xi(z) + (\beta - \gamma) z \varrho' - \alpha \varrho = 0, \quad \eta(z) + (\beta - \gamma) z \sigma' - \beta \sigma = 0$$

bestimmt sind, so erhält unsre Gruppe die Form

$$p, \quad q, \quad zq, \quad \alpha x p + \beta y q + (\beta - \gamma) z r.$$

Diese Gruppe ist aber nicht wesentlich verschieden von der Gruppe des Falles Bα

$$p, \quad q, \quad zp, \quad \alpha x p + \beta y q + (\alpha - \gamma) z r.$$

C. $X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f = \sigma \,.\, X_1 f, \quad X_4 \neq \tau \,.\, X_1 f.$

Die Klammerausdrücke $(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0$ liefern

$$X_1 \varrho = 0, \quad X_1 \sigma = 0.$$

ρ und σ dürfen keine Constanten sein, weil sonst $X_2 f$ u. $X_3 f$ nicht unabhängig von $X_1 f$ wären. Wir nehmen zunächst an, dass ρ u. σ durch keine Relation gebunden sind, d. h. ρ u. σ sind die beiden Lösungen der Gleichung $X_1 f = 0$. Sei also:

α) $$\sigma \not\equiv \varphi(\varrho).$$

Wir können ρ als x_1, σ als y_1 benutzen und z_1 so bestimmen, dass $X_1 z_1 = 1$ wird. Da x_1, y_1, z_1 von einander unabhängig sind, können wir sie als neue Veränderliche einführen. Es kommt

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = yr.$$

$X_4 f$ hat nach unsrer Annahme die Form

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r,$$

wobei ξ u. η nicht beide Null sind.

Die Klammerrelationen liefern

$$\xi = (\alpha - \beta)x, \quad \eta = (\alpha - \gamma)y, \quad \zeta = \alpha z + \zeta(xy).$$

$$X_4 f = (\alpha - \beta)xp + (\alpha - \gamma)yq + (\alpha z + \zeta(xy))r.$$

Bei Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(xy),$$

erhält unsre Gruppe die Form

$$r_1, \quad x_1 r_1, \quad y_1 r_1, \quad (\alpha - \beta)x_1 p_1 + (\alpha - \gamma)y_1 q_1 + \alpha z_1 r_1,$$

wenn wir die Function $Z(xy)$ so bestimmen, dass

$$(\alpha - \beta)x Z_x' + (\alpha - \gamma)y Z_y' - \alpha Z(xy) + \zeta(xy) = 0$$

wird. Vertauschen wir noch z mit x, so nimmt unsre Gruppe die Form an:

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad \alpha xp + (\alpha - \gamma)yq + (\alpha - \beta)zr.}$$

β) Es sei

$$\sigma = \varphi(\varrho),$$

ρ ist sicher nicht constant; wir benutzen es als x_1, die zweite von ρ unabhängige Lösung der Gleichung $X_1 f = 0$ benutzen wir als y_1, z_1 dagegen können wir so bestimmen, dass $X_1 z_1 = 1$ wird. Durch Einführung dieser neuen Veränderlichen kommt

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = \varphi(x)r.$$

Für die Function $\varphi(x)$ und

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

geben die Klammerrelationen

$(X_1X_4) = \xi_z p + \eta_z q + \zeta_z r = \alpha r.$
$(X_2X_4) = x\xi_z p + x\eta_z q + (x\zeta_z - \xi) r = \beta x r.$
$(X_3X_4) = \varphi\xi_z p + \varphi\eta_z q + (\varphi\zeta_z - \xi\varphi') r = \gamma\varphi(x) r.$

Wir erhalten hieraus

$$\xi = (\alpha - \beta)x, \quad \eta = \eta(xy), \quad \zeta = \alpha z + \zeta(xy), \quad \varphi = \varkappa x^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}}.$$

Die vier infin. Transformationen lauten zunächst

$$r, \quad xr, \quad \varkappa . x^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} r, \quad (\alpha-\beta)xp + \eta(xy)q + (\alpha z + \zeta(xy))r.$$

An Stelle $X_3 f = \varkappa . x^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} r$ benutzen wir

$$X_3' f = 1/\varkappa \, X_3 f = x^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} r.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(xy), \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei die Functionen $Y(xy)$ u. $Z(xy)$ so bestimmt sind, dass:

$$(\alpha-\beta)x \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

$$(\alpha-\beta)x \frac{\partial Z}{\partial x} + \eta \frac{\partial Z}{\partial y} + \alpha Z(xy) + \zeta(xy) = 0$$

wird, so erhält unsre Gruppe die Form

$$r, \quad xr, \quad x^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} r, \quad (\alpha-\beta)xp + \alpha z r.$$

Vertauschen wir x mit z und sodann z mit y, so hat die Gruppe die Form

$$\boxed{p, \quad yp, \quad y^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} p, \quad \alpha xp + (\alpha-\beta) yq.}$$

Wir haben somit nur eine viergliedrige Gruppe der Ebene (xy) erhalten.

$\gamma)$ $X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f.$

Die Rechnungen führen zu der Forderung

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

was jedoch wider die Voraussetzung ist.

Wir haben bis jetzt immer vorausgesetzt, dass keine der Zahlen α, β, γ verschwinde. Die Fälle, dass eine der Zahlen α, β, γ verschwindet, sind besonders hervorzuheben, da dann die erste derivierte Gruppe nur zweigliedrig ist. In Bezug auf die Resultate können wir aber einfach die bis jetzt aufgestellten Gruppen benutzen, indem wir darin α resp. β resp. γ gleich Null setzen.

II. $(X_1 X_2) = 0,\ (X_1 X_3) = 0,\ (X_2 X_3) = 0,\ (X_1 X_4) = \alpha X_1 f,\ (X_2 X_4) = \beta X_2 f,$
$$(X_3 X_4) = X_2 f + \beta X_3 f, \quad \alpha \neq \beta.$$

A. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i(xyz).$

Wir können $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ als in folgender Form vorliegend annehmen:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = r.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerrelationen

$$\xi = \alpha x + \alpha_1, \quad \eta = \beta y + z + \beta_1, \quad \zeta = \beta z + \beta_2.$$
$$X_4 f = (\alpha x + \alpha_1)\, p + (\beta y + z + \beta_1)\, q + (\beta z + \beta_2)\, r.$$

Hierbei sind α_1, β_1, β_2 unwesentlich, wir benutzen als neues $X_4'f$

$$X_4'f = X_4 f - \alpha_1 X_1 f - \beta_1 X_2 f - \beta_2 X_3 f = \alpha x p + (\beta y + z) q + \beta z r.$$

Unsre Gruppe hat also die Form

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad \alpha x p + (\beta y + z) q + \beta z r.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$

Nun können wir setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q.$$

Für

$$X_3 f = \xi p + \eta q$$

liefern die Klammerrelationen

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_y = 0,$$

d. h. ξ u. η sind frei von x u. y.

α) Da ξ u. η nicht beide zugleich constant sein können, weil sonst X_3f nicht unabhängig wäre von X_1f u. X_2f, so wollen wir zunächst annehmen

$$\xi = \xi(z), \quad \eta = \eta(z).$$

Wir haben also:

$$X_1f = p, \quad X_2f = q, \quad X_3f = \xi(z)p + \eta(z)q.$$

α_a) X_4f sei durch keine lineare Relation mit X_1f u. X_2f verbunden, sondern möge die allgemeine Form

$$X_4f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0$$

haben. Die Funktion $\xi(z)$ in X_3f führen wir als neues z_1 ein, $\eta(z)$ möge dabei etwa in $\tilde{\eta}(z_1)$ übergehen, also

$$X_3f = zp + \tilde{\eta}(z)q.$$

Für die Function $\tilde{\eta}(z)$ u. für X_4f ergeben die Klammerrelationen

$$\tilde{\eta} = \frac{\lg \varkappa z}{\beta - \alpha}, \quad \xi_1 = \alpha x + \xi_1(z), \quad \eta_1 = \beta y + \eta_1(z), \quad \zeta_1 = (\alpha - \beta)z.$$

Unsre Gruppe hat also zunächst die Form

$$X_1f = p, \quad X_2f = q, \quad X_3f = zp + \frac{\lg \varkappa z}{\beta - \alpha} q,$$

$$X_4f = (\alpha x + \xi_1)p + (\beta y + \eta_1)q + (\alpha - \beta)zr.$$

Die Konstante $\varkappa$ ist unwesentlich, wir benutzen als neues $X_3'f$

$$X_3'f = X_3f - \frac{\lg \varkappa}{\beta - \alpha} X_2f = zp + \frac{\lg z}{\beta - \alpha} q.$$

Ferner können wir durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x + \varrho(z), \quad y_1 = y + \sigma(z), \quad z_1 = \lg z,$$

wobei $\rho(z)$ u. $\sigma(z)$ durch die Differentialgleichungen

$$\xi_1(z) + (\alpha - \beta) z \varrho' - \alpha \varrho = 0, \quad \eta_1(z) + (\alpha - \beta) z \sigma' - \beta \sigma = 0$$

bestimmt sind, unsre Gruppe auf die Form bringen

$$\boxed{p, \quad q, \quad e^z p + \frac{z}{\beta - \alpha} q, \quad \alpha x p + \beta y q + (\alpha - \beta) r.}$$

α_b) Die Annahme

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q$$

führt zu der Forderung

$$\alpha = \beta$$

und das ist gegen unsre Voraussetzung.

β) Es sei

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

Hier haben wir zunächst

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \text{const. } p + \eta(z) q$$

oder, wenn man $\eta(z)$ als neues z_1 einführt, einfacher

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = z q.$$

Die Annahme

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q$$

liefert den Widerspruch $1 = 0$, es ist also zu setzen

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0.$$

Die Klammerausdrücke liefern die Werte

$$\xi_1 = \alpha x + \xi(z), \quad \eta_1 = \beta y + \eta(z), \quad \zeta_1 = -1.$$
$$X_4 f = (\alpha x + \xi) p + (\beta y + \eta) q - r.$$

Durch eine passende Transformation lassen sich die arbiträren Functionen $\xi(z)$ u. $\eta(z)$ entfernen, und die Gruppe erhält die Form

$p, \quad q, \quad zq, \quad \alpha x p + \beta y q - r.$

C. $X_3 f = \varrho \,.\, X_1 f.$

α) $X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f \neq \sigma \,.\, X_1 f.$

Wir können setzen

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = x r, \quad X_3 f = q.$$

α_a) $X_4 f$ sei durch keine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_3 f$ verbunden, sondern habe die allgemeine Form

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \xi \neq 0.$$

Die Klammerrelationen lauten

$$(X_1 X_4) = \xi_z p + \eta_z q + \zeta_z r = \alpha r.$$
$$(X_2 X_4) = x \xi_z p + x \eta_z q + (x \zeta_z - \xi) r = \beta x r.$$
$$(X_3 X_4) = \xi_y p + \eta_y q + \zeta_y r = x r + \beta q.$$

also

$$\xi = (\alpha-\beta)x, \quad \eta = \beta y + \eta(x), \quad \zeta = \alpha z + xy + \zeta(x).$$

$$X_4 f = (\alpha-\beta)xp + (\beta y + \eta(x))q + (\alpha z + xy + \zeta(x))r.$$

Bei Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + Y(x), \quad z_1 = z + Z(x),$$

wo $Y(x)$ u. $Z(x)$ durch die Differentialgleichungen

$$\eta(x) + (\alpha-\beta)xY_x' - \beta Y(x) = 0, \quad \zeta(x) + (\alpha-\beta)xZ_x' - \alpha Z(x) - xY(x) = 0$$

bestimmt sind, nimmt die Gruppe, wenn man schliesslich noch z mit x vertauscht, die Form an

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad (\alpha x + yz)p + \beta yq + (\alpha-\beta)zr.}$$

α_b) Die Annahme

$$X_4 f = \eta q + \zeta r$$

würde zu der Forderung

$$\alpha = \beta$$

führen; ist also auszuschliessen.

$$\beta) \quad X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f \mathrel{\mp} \tau X_1 f.$$

Nach I C α) können wir, sobald

$$\beta_a) \quad \sigma \mathrel{\not\equiv} \varphi(\varrho)$$

angenommen wird, setzen

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = yr.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerausdrücke

$$\xi = (\alpha - \beta)x, \quad \eta = (\alpha - \beta)y - x, \quad \zeta = \alpha z + \zeta(xy).$$

$$X_4 f = (\alpha - \beta)xp + ((\alpha - \beta)y - x)q + (\alpha z + \zeta(xy))r.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + \lambda(xy),$$

wobei die Function $\lambda(xy)$ die Differentialgleichung

$$\zeta(xy) - \alpha\lambda(xy) + (\alpha - \beta)x\frac{\partial\lambda}{\partial x} + (y(\alpha - \beta) - x)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$$

erfüllt, so erhält unsre Gruppe, wenn wir schliesslich noch x mit z vertauschen, die Form

$$\boxed{p,\ zp,\ yp,\ \alpha xp + ((\alpha-\beta)y - z)q + (\alpha-\beta)zr.}$$

β_b) Es sei

$$\sigma = \varphi(\varrho).$$

Nach I C können wir X_1f, X_2f, X_3f in der Form

$$X_1f = r,\quad X_2f = xr,\quad X_3f = \varphi(x)r$$

annehmen. Für die Function $\varphi(x)$ u. für

$$X_4f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

kommt:

$$\begin{aligned}(X_1X_4) &= \xi_z p + \eta_z q + \zeta_z r = \alpha r.\\ (X_2X_4) &= x\xi_z p + x\eta_z q + (x\zeta_z - \xi)r = \beta xr.\\ (X_3X_4) &= \varphi\xi_z p + \varphi\eta_z q + (\varphi\zeta_z - \xi\varphi')r = (x+\beta\varphi)r.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\xi = (\alpha-\beta)x,\quad \eta = \eta(xy),\quad \zeta = \alpha z + \zeta(xy),$$

während φ durch die Differentialgleichung

$$(\alpha-\beta)\left\{\varphi - x\varphi'\right\} = x$$

bestimmt ist. Durch Integration kommt

$$\varphi = -\frac{x\lg \varkappa x}{\alpha-\beta}.$$

Wir haben demnach

$$X_1f = r,\quad X_2f = xr,\quad X_3f = -\frac{x\lg\varkappa x}{\alpha-\beta}r,$$

$$X_4f = (\alpha-\beta)xp + \eta(xy)q + (\alpha z + \zeta(xy))r.$$

Zunächst ist in X_3f die Konstante $\varkappa$ unwesentlich, wir setzen

$$X_3'f = X_3f + \frac{\lg\varkappa}{\alpha-\beta}X_2f = -\frac{x\lg x}{\alpha-\beta}r.$$

Führen wir jetzt neue Veränderliche ein

$$x_1 = x,\quad y_1 = Y(xy),\quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei Y(xy) u. Z(xy) bestimmt sind durch die Differentialgleichungen:

$$(\alpha-\beta)x\frac{\partial Y}{\partial x}+\eta\frac{\partial Y}{\partial y}=0,\quad (\alpha-\beta)x\frac{\partial Z}{\partial x}+\eta\frac{\partial Z}{\partial y}+\zeta-\alpha Z(xy)=0,$$

so nimmt, wenn wir x mit z und dann z mit y vertauschen, die Gruppe die Form an:

$$\boxed{p,\quad e^y p,\quad \frac{y e^y}{\beta-\alpha}p,\quad \alpha x p+(\alpha-\beta)q.}$$

Wir haben also nur eine viergliedrige Gruppe der Ebene (xy) erhalten.

$$\gamma.\quad X_2f=\varrho\,.\,X_1f,\quad X_3f=\sigma\,.\,X_1f,\quad X_4f=\tau\,.\,X_1f.$$

Diese Annahme führt zu den Forderungen:

$$\alpha=\beta,\quad \varrho=0.$$

Der Fall γ existiert also nicht.

Hiermit sind alle Gruppen des Raumes (xyz) von der Zusammensetzung II bestimmt. Die Fälle, dass eine der beiden Zahlen α, β verschwindet, ist (wie in Fall I) deshalb bemerkenswert, weil dann die erste derivierte Gruppe nur zweigliedrig ist. In Bezug auf die Resultate können wir auch hier die Gruppen des Falles II benutzen, indem wir α resp. β gleich Null setzen.

$$\text{III.}\quad (X_1X_2)=0,\quad (X_1X_3)=0,\quad (X_2X_3)=0,\quad (X_1X_4)=0,$$
$$(X_2X_4)=0,\quad (X_3X_4)=X_2f.$$

$$\text{A.}\quad \mu_1X_1f+\mu_2X_2f+\mu_3X_3f\neq 0,\quad \mu_i=\mu_i(xyz).$$

Wir nehmen an:

$$X_1f=p,\quad X_2f=q,\quad X_3f=r.$$

Für

$$X_4f=\xi p+\eta q+\zeta r$$

liefern die Klammerausdrücke

$$\xi=\alpha,\quad \eta=z+\beta,\quad \zeta=\gamma,$$
$$X_4f=\alpha p+(z+\beta)q+\gamma r.$$

Anstatt X_4f benutzen wir

$$X_4'f=X_4f-\alpha X_1f-\beta X_2f-\gamma X_3f=zq.$$

Die Gruppe hat also die Form

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad zq.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$

Wir setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q.$$

Für

$$X_3 f = \xi p + \eta q$$

liefern die Klammerausdrücke

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_y = 0.$$

ξ u. η sind frei von x u. y.

α) ξ u. η können nicht beide constant sein, sonst wäre $X_3 f$ nicht unabhängig von $X_1 f$ u. $X_2 f$; setzen wir den Fall

$$\xi = \xi(z), \quad \eta = \eta(z),$$

so können wir nach früherem $X_3 f$ auf die Form bringen

$$X_3 f = zp + \bar{\eta}(z) q.$$

Beide Annahmen für $X_4 f$

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0$$

und

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q$$

führen zu dem widersinnigen Resultate

$$1 = 0.$$

β) Es sei in $X_3 f = \xi p + \eta q$.

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

In diesem Falle können wir setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zq.$$

Die Annahme

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q$$

führt zu der widersinnigen Forderung

$$1 = 0,$$

also ist anzunehmen

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0.$$

Die Klammerrelationen liefern

$$\xi_1 = \xi_1(z), \quad \eta_1 = \eta_1(z), \quad \zeta_1 = -1.$$

$$X_4 f = \xi_1(z) p + \eta_1(z) q - r.$$

Bei Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_1 = x + X(z), \quad y_1 = y + Y(z), \quad z_1 = z,$$

wobei

$$X(z) = \int \xi_1(z) dz, \quad Y(z) = \int \eta_1(z) dz.$$

ist, erhält unsre Gruppe die Form

$$p, \quad q, \quad zq, \quad -r.$$

Vergleichen wir diese Gruppe mit der Gruppe A, so sehen wir, dass wir in Wirklichkeit keine neue Gruppe gefunden haben, indem ja $X_3 f$ u. $X_4 f$ nur ihre Rollen vertauscht haben.

C. $X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f.$

α) $X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f \neq \sigma \,.\, X_1 f.$

Wir setzen wie früher

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = q.$$

Die Klammerrelationen zeigen, dass $X_4 f$ durch eine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_3 f$ verbunden ist. Es ergiebt sich für

$$X_4 f = \eta q + \zeta r.$$

$$\eta = \eta(x), \quad \zeta = xy + \zeta(x).$$

$$X_4 f = \eta(x) q + (xy + \zeta(x)) r.$$

Wir haben also

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = q, \quad X_4 f = \eta(x) q + (xy + \zeta(x)) r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + Y(x), \quad z_1 = z,$$

wobei

$$Y(x) = \frac{\zeta(x)}{x}$$

ist, nimmt die Gruppe die Form an, wenn man noch x mit z vertauscht

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad yzp + \eta(z) q.} \quad \eta(z) \neq 0.$$

oder, wenn $\eta(z) = 0$

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad yzp.}$$

β) $X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f \neq \tau . X_1 f.$

Machen wir die Annahme

$$\beta_a) \quad \sigma \neq \varphi(\varrho),$$

so können wir nach früherem die infinitesimalen Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ in folgender Form schreiben

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = yr.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerausdrücke

$$\xi = 0, \quad \eta = -x, \quad \zeta = \zeta(xy).$$

$$X_4 f = -xq + \zeta(xy) r.$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(xy).$$

wobei die Function $Z(xy)$ durch die Differentialgleichung

$$\zeta(xy) - x \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

bestimmt ist, erhält unsre Gruppe, wenn man schliesslich noch x mit z vertauscht, die Form

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad -zq.}$$

β_b) Setzen wir σ als Function von ρ voraus,

$$\sigma = \varphi(\varrho)$$

so können wir zunächst $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ als in folgender Form vorliegend annehmen

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = \varphi(x) r.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerrelationen zunächst

$$\xi = 0$$

und ausserdem die widersinnige Forderung

$$-\xi \frac{d\varphi}{dx} = x = 0.$$

Der Fall, dass σ eine Function von ρ ist, ist also auszuschliessen.

Die Annahme

$$\gamma)\ X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f.$$

liefert vermöge der Klammerrelationen

$$X_1 \varrho = 0, \quad X_1 \tau = 0, \quad X_1 \sigma = 0, \quad \varrho = 0,$$

d. h. die Gruppe wäre nicht viergliedrig. Also existiert auch der Fall γ nicht.

$$\text{IV.}\ (X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_4) = \alpha X_1 f,$$
$$(X_2X_4) = \alpha X_2 f, \quad (X_3X_4) = X_2 f + \alpha X_3 f. \quad \alpha \neq 0.$$

$$\text{A.}\ \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i\,(xyz).$$

Wir können setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = r.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerausdrücke

$$\xi = \alpha x + \alpha_1, \quad \eta = \alpha y + z + \alpha_2, \quad \zeta = \alpha z + \alpha_3$$
$$X_4 f = (\alpha x + \alpha_1) p + (\alpha y + z + \alpha_2) q + (\alpha z + \alpha_3) r.$$

α_1, α_2, α_3 sind unwesentliche Constante; für $X_4 f$ führen wir ein

$$X_4' f = X_4 f - \alpha_1 X_1 f - \alpha_2 X_2 f - \alpha_3 X_3 f = \alpha(xp + yq + zr) + zq.$$

Unsre Gruppe hat also die Form:

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad \alpha(xp + yq + zr) + zq.}$$

$$\text{B.}\ \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$$

Nach früherem setzen wir

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \xi p + \eta q.$$

Die Berechnung der Klammerausdrücke ergibt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Wir haben also folgende Fälle zu unterscheiden:

$$\alpha)\ \xi = \xi(z), \quad \eta = \eta(z).$$

In diesem Falle können wir wie früher nach Einführung passender neuer Veränderlicher $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ in folgender Form vorliegend annehmen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zp + \tilde{\eta}(z) q.$$

Beide Annahmen für $X_4 f$

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0$$

und

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q$$

führen zu der widersinnigen Forderung

$$1 = 0.$$

β) Es sei

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

Bei dieser Voraussetzung dürfen wir wie früher setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zq.$$

Die Klammerausdrücke zeigen, dass $X_4 f$ durch keine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_2 f$ verbunden ist, sondern die allgemeine Form

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0$$

hat. Wir erhalten folgende Werte

$$\xi_1 = \alpha x + \xi(z), \quad \eta_1 = \alpha y + \eta(z), \quad \zeta_1 = -1.$$

$$X_4 f = (\alpha x + \xi(z)) p + (\alpha y + \eta(z)) q - r.$$

Durch eine passende Transformation lassen sich die arbiträren Functionen $\xi(z)$, $\eta(z)$ beseitigen und die Gruppe hat die Form

$$\boxed{p, \quad q, \quad zq, \quad \alpha(xp + yq) - r.}$$

C. $X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f$.

$$\alpha)\ X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f \neq \sigma X_1 f.$$

Nach früheren Resultaten setzen wir

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = q.$$

Die Klammerrelationen zeigen, dass X_4f durch eine lineare Relation mit X_1f, X_2f u. X_3f verbunden ist, dass es also die Form hat

$$X_4f = \eta q + \zeta r$$

und zwar erhalten wir

$$\eta = \alpha y + \eta(x), \quad \zeta = \alpha z + xy + \zeta(x),$$
$$X_4f = (\alpha y + \eta(x))q + (\alpha z + xy + \zeta(x))r.$$

Durch Einführung passender neuer Veränderlicher erhält die Gruppe folgende Gestalt

$$r, \quad xr, \quad q, \quad \alpha yq + (\alpha z + xy)r,$$

oder wenn wir x mit z vertauschen

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad (\alpha x + yz)p + \alpha yq.}$$

β) $X_2f = \varrho \, . \, X_1f, \quad X_3f = \sigma \, . \, X_1f, \quad X_4f \mp \tau \, . \, X_1f.$

Setzen wir zunächst

$$\sigma \mp \varphi(\varrho)$$

voraus, so können wir schreiben

$$X_1f = r, \quad X_2f = xr, \quad X_3f = yr.$$

Für

$$X_4f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerausdrücke

$$\xi = 0, \quad \eta = -x, \quad \zeta = \alpha z + \zeta(xy),$$
$$X_4f = -xq + (\alpha z + \zeta(xy))r.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wo die Function Z (xy) die Differentialgleichung

$$\zeta(xy) - \alpha Z(xy) - x\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

erfüllt, so erhält die Gruppe, wenn man schliesslich x mit z vertauscht, die Form

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad \alpha xp - zq.}$$

Die Annahme

$$\sigma = \varphi(\varrho)$$

führt dagegen zu dem widersinnigen Resultate

$$x = 0$$

und ist deshalb auszuschliessen.

$$\gamma)\ X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f.$$

Die Klammerrelationen liefern

$$X_1 \varrho = X_1 \sigma = 0, \quad X_1 \tau = \alpha, \quad \varrho = 0,$$

d. h. die Gruppe wäre nicht viergliedrig. Fall γ existiert nicht.

$$\text{V.}\ (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0, \quad (X_1 X_4) = X_1 f,$$
$$(X_2 X_4) = X_1 f + X_2 f, \quad (X_3 X_4) = X_2 f + X_3 f.$$

$$\text{A.}\ \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i(x y z).$$

Wir setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f q, \quad X_3 f = r.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerrelationen

$$\xi = x + y + \alpha, \quad \eta = y + z + \beta, \quad \zeta = z + \gamma.$$
$$X_4 f = (x + y + \alpha) p + (y + z + \beta) q + (z + \gamma) r.$$

Die Constanten α, β, γ sind unwesentlich, wir benutzen

$$X_4' f = X_4 f - \alpha X_1 f - \beta X_2 f - \gamma X_3 f = (x + y) p + (y + z) q + z r$$

als neues $X_4 f$. Unsre Gruppe erhält dann die Form:

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad (x + y) p + (y + z) q + z r.}$$

$$\text{B.}\ \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$$

Nach Satz 2 setzen wir

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \xi p + \eta q.$$

Den Klammerausdrücken zufolge sind ξ u. η frei von x u. y

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

α) ξ u. η seien beide Functionen von z

$$\xi = \xi(z), \quad \eta = \eta(z).$$

Nach früherem ist es dann möglich, zu setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zp + \tilde{\eta}(z) q.$$

α_a) $X_4 f$ sei durch keine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_2 f$ verbunden, sondern habe die allgemeine Form

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0.$$

Die Klammerausdrücke ergeben für die Function $\tilde{\eta}(z)$ u. für $X_4 f$ folgende Werte

$$\xi_1 = x + y + \xi(z), \quad \eta_1 = y\,\eta(z), \quad \zeta_1 = \tilde{\eta}(z) = \sqrt{2(\varkappa - z)}.$$

$$X_3 f = zp + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, q.$$

$$X_4 f = (x + y + \xi) p + (y + \eta) q + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, r.$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_1 = x + X(z), \quad y_1 = y + Y(z), \quad z_1 = z.$$

wobei die Functionen X(z), Y(z) bestimmt sind durch

$$\eta(z) + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, Y_z' - Y(z) = 0,$$

$$\xi(z) + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, X_z' - X(z) - Y(z) = 0,$$

erhält die Gruppe folgende Gestalt

$$p, \quad q, \quad zp + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, q, \quad (x + y) p + yq + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, r,$$

oder, wenn wir weiterhin $z_1 = \varkappa - z$ als neues z einführen,

$$p, \quad q, \quad (\varkappa - z) p + \sqrt{2z}\, q, \quad (x + y) p + yq + \sqrt{2z}\, r.$$

Anstatt $X_3 f = (\varkappa - z) p + \sqrt{2z}\, q$ benutzen wir einfacher

$$X_3' f = X_3 f - \varkappa X_1 f = - zp + \sqrt{2z}\, q.$$

Führen wir schliesslich noch

$$z_1 = \sqrt{2z}$$

als neues z ein, so erhält die Gruppe die einfache Form

$$\boxed{p, \quad q, \quad \frac{-z^2}{2} p + zq, \quad (x + y) p + yq - r.}$$

α_b) Die Annahme

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q$$

führt zu der widersinnigen Forderung

$$1 = 0.$$

β) Es sei in

$$X_3 f = \xi p + \eta q$$

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

Wir dürfen dann schreiben

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = z q.$$

Beide für $X_4 f$ möglichen Annahmen

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \xi \neq 0.$$

und

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q,$$

führen unter anderem zu dem widersinnigen Ergebnisse

$$z = 0.$$

C. $X_2 f = \varrho \, . \, X_1 f.$

α) $X_2 f = \varrho \, . \, X_1 f, \quad X_3 f \neq \sigma \, . \, X_1 f.$

Wir setzen wie früher

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = x r, \quad X_3 f = q.$$

Die Rechnung zeigt, dass $X_4 f$ durch keine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_3 f$ verbunden sein kann, denn sonst müsste

$$1 = 0$$

sein. Wir haben also zu setzen

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \xi \neq 0.$$

Die Klammerrelationen liefern die Werte

$$\xi = -1, \quad \eta = y + \eta(x), \quad \zeta = z + x y + \zeta(x),$$
$$X_4 f = -p + (y + \eta(x)) q + (z + x y + \zeta(x)) r.$$

Führen wir die neuen Veränderlichen ein

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + Y(x), \quad z_1 = z + Z(x),$$

wobei

$$\eta(x) - Y_x' - Y(x) = 0, \quad \zeta(x) - x Y(x) - Z_x' - Z(x) = 0$$

ist, und vertauschen schliesslich noch x mit z, so nimmt die Gruppe folgende Gestalt an

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad (x+yz)p+yq-r.}$$

$$\beta)\ X_2f=\varrho\,.\,X_1f, \quad X_3f=\sigma\,.\,X_1f, \quad X_4f \neq \tau X_1f.$$

Setzen wir zunächst

$$\beta_a)\quad \sigma \neq \varphi(\varrho)$$

voraus, so können wir schreiben

$$X_1f=r, \quad X_2f=xr, \quad X_3f=yr.$$

Für

$$X_4f=\xi p+\eta q+\zeta r$$

erhält man durch Berechnung der Klammerausdrücke

$$\xi=-1, \quad \eta=-x, \quad \zeta=z+\zeta(xy),$$
$$X_4f=-p-xq+(z+\zeta(xy))r.$$

Führen wir

$$z_1=z+Z(xy)$$

als neues z ein, wobei

$$\zeta(xy)-Z(xy)-Z_x'-xZ_y'=0$$

ist, und vertauschen noch schliesslich x mit z, so erhält die Gruppe die Form

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad xp-zq-r.}$$

Setzen wir jedoch

$$\beta_b)\quad \sigma=\varphi(\varrho)$$

voraus, so haben wir zunächst

$$X_1f=r, \quad X_2f=xr; \quad X_3f=\varphi(x)r.$$

Für die Function $\varphi(x)$ und

$$X_4f=\xi p+\eta q+\zeta r$$

erhalten wir durch Klammeroperation

$$\xi=-1, \quad \eta=\eta(xy), \quad \zeta=z+\zeta(xy), \quad \varphi=\frac{x^2}{2}+\alpha.$$

Es ist also

$$X_3f=\left(\frac{x^2}{2}+\alpha\right)r, \quad X_4f=-p+\eta(xy)\,q+(z+\zeta(xy))r.$$

Anstatt $X_3 f$ können wir benutzen

$$X_3' f = X_3 f - \alpha X_1 f = \frac{x^2}{2} r.$$

Führen wir die neuen Veränderlichen ein

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(xy), \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei

$$\eta(xy) Y_y' - Y_x' = 0, \quad \zeta(xy) + \eta(xy) Z_y' - Z_x' - Z(xy) = 0,$$

so nimmt unter Vertauschung von x mit z, und dann von z mit y die Gruppe die Form an:

$$\boxed{p, \quad yp, \quad \frac{y^2}{2} p, \quad xp - q.}$$

Wir haben also nur eine viergliedrige Gruppe der Ebene (xy) erhalten.

$$\gamma) \quad X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f.$$

Diese Annahme führt den Klammerrelationen zufolge zu der widersinnigen Forderung

$$1 = 0$$

und ist also auszuschliessen.

$$\text{VI.} \quad (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0, \quad (X_1 X_4) = 0,$$
$$(X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = 0.$$

$$\text{A.} \quad \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i(xyz).$$

Wir setzen:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = r.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerrelationen

$$\xi_1 = c_1, \quad \eta = c_2, \quad \zeta = c_3,$$
$$X_4 f = c_1 p + c_2 q + c_3 r,$$

d. h. die vier infin. Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ sind nicht unabhängig von einander; Fall A existiert also nicht.

$$\text{B.} \quad \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$$

Wir können schreiben:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \xi p + \eta q.$$

Den Klammerrelationen zufolge ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

d. h. ξ u. η sind frei von x u. y. Dass sie beide zugleich constant sind, ist von vornherein ausgeschlossen, sonst wäre

$$X_3 f = c_1 p + c_2 q,$$

d. h. $X_1 f$, $X_2 f$ u. $X_3 f$ wären nicht unabhängig; wir haben zwei Möglichkeiten:

$$\alpha) \quad \xi = \xi(z) \neq \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

Unter dieser Voraussetzung können wir schreiben

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zp + \bar{\eta}(z) q.$$

Die Klammerrelationen ergeben für $\bar{\eta}(z)$ und

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r$$

$$\xi_1 = \xi_1(z), \quad \eta_1 = \eta_1(z), \quad \zeta_1 = 0, \quad \bar{\eta}(z) = \bar{\eta}(z).$$

Es ist also

$$X_3 f = zp + \bar{\eta}(z) q, \quad X_4 f = \xi_1(z) p + \eta_1(z) q,$$

und die Gruppe hat die Form:

$$\boxed{p, \quad q, \quad zp + \bar{\eta}(z) q, \quad \xi_1(z) p + \eta_1(z) q.}$$

Hierbei ist nach Voraussetzung $\bar{\eta}(z)$ eine willkürliche Function von z, während $\xi_1(z)$ u. $\eta_1(z)$ nicht beide zugleich const. gesetzt werden dürfen, da sonst $X_4 f$ nicht unabhängig ist von $X_1 f$ u. $X_2 f$.

β) Jetzt sei

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

Wir dürfen setzen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zq.$$

Für

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r$$

kommt durch Bildung der Klammerausdrücke

$$\xi_1 = \xi_1(z), \quad \eta_1 = \eta_1(z), \quad \zeta_1 = 0$$

$$X_4 f = \xi_1(z) p + \eta_1(z) q.$$

Die Gruppe hat demnach die Form

$$\boxed{p, \quad q, \quad zq, \quad \xi_1(z)p + \eta_1(z)q.}$$

Hier dürfen natürlich, wie in Fall α) ξ u. η nicht beide zugleich constant sein.

$$C. \quad X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f = \sigma \,.\, X_1 f, \quad X_4 f \mp \tau X_1 f.$$

Ist

$$\alpha) \quad \sigma \mp \varphi(\varrho),$$

so können wir setzen

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = yr.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerausdrücke

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \zeta(xy),$$
$$X_4 f = \zeta(xy) r.$$

Vertauschen wir noch x mit z, so erhalten wir die Gruppe

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad \zeta(yz)p.}$$

$\zeta(yz)$ ist eine willkürliche Function von y u. z.

β) Im Falle

$$\sigma = \varphi(\varrho),$$

können wir setzen

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = \varphi(x) r.$$

Für die Function $\varphi(x)$ und für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerrelationen

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta(xy), \quad \zeta = \zeta(xy), \quad \varphi(x) = \varphi(x).$$

Es ist also

$$X_3 f = \varphi(x) r, \quad X_4 f = \eta(xy) q + \zeta(xy) r.$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(xy), \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei

$$\eta(xy) \frac{\partial Y}{\partial y} = 1, \quad \zeta(xy) + \eta(xy) \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

ist, erhält die Gruppe, wenn man x mit z vertauscht, die Form

$$\boxed{\overline{p}, \quad \overline{zp}, \quad \overline{\varphi(z)p}, \quad \overline{q}.}$$

Vertauschen wir hierin X_2f mit X_4f, was ohne Änderung des Resultates geschieht, so sehen wir, dass die Gruppe β ein Spezialfall von B α) ist.

$$\gamma) \quad X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f.$$

Vermöge der Klammerausdrücke ist

$$X_1 \varrho = 0, \quad X_1 \sigma = 0, \quad X_1 \tau = 0.$$

Dass eine der Grössen ρ, σ, τ gleich constans werden könnte, ist von vornherein ausgeschlossen; da aber die Gleichung $X_1 f = 0$ nur zwei von einander unabhängige Lösungen besitzt, so haben wir folgende Fälle zu unterscheiden.

1. $\sigma \neq \varphi(\varrho)$, also $\tau = \psi(\varrho\sigma)$.

Die sich hier ergebende Gruppe

$$p, \quad zp, \quad yp, \quad \zeta(yz)p$$

hat uns schon der Fall C β_a geliefert.

2. $\sigma = \varphi(\varrho)$, $\tau = \psi(\varrho)$.

In diesem Falle führen wir ρ als neues x_1, die zweite von ρ unabhängige Lösung der Gleichung $X_1 f = 0$ als y_1 ein; während wir das neue z_1 so wählen können, dass $X_1 z_1 = 1$ ist. Vertauschen wir demnach x mit z und dann z mit y, so erhalten wir die Gruppe der Ebene (xy)

$$\boxed{p, \quad yp, \quad \varphi(y)p, \quad \psi(y)p.}$$

ψ, φ willkürlich.

3. $\sigma = \varphi(\varrho)$, $\tau \neq \psi(\varrho)$.

Hier führen wir ρ als neues x_1, τ als y_1 ein und bestimmen z_1 wieder so, dass $X_1 z_1 = 1$ wird. Unter Vertauschung von x mit z erhalten wir die Gruppe

$$\boxed{\overline{p}, \quad \overline{zp}, \quad \overline{\varphi(z)p}, \quad \overline{yp}.}$$

Wir können hierin X_3f mit X_4f vertauschen, und sehen so, dass wir nur einen Spezialfall von C α erhalten haben.

Der Fall γ hat uns also nur eine neue Gruppe und zwar eine Gruppe der Ebene (xy) geliefert.

VII. $(X_1X_2)=0,\ \ (X_1X_3)=0,\ \ (X_2X_3)=0,\ \ (X_1X_4)=X_1f,$
$$(X_2X_4)=X_2f,\ \ (X_3X_4)=X_3f.$$

Betrachten wir die Zusammensetzungen VII und vergleichen sie mit den Zusammensetzungen I, so sehen wir, Fall VII geht aus Fall I hervor, wenn man in Fall I $\alpha=\beta=\gamma=1$ setzt. Mit Ausnahme eines einzigen Falles ($C\beta$) können wir die Resultate von I benutzen, indem wir überall $\alpha=\beta=\gamma=1$ setzen und in den Fällen, wo dadurch eine Unbestimmtheit eintritt, eine arbiträre Function des betreffenden Argumentes setzen, z. B. $z^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}=z^{\frac{0}{0}}=\varphi(z)$. Die Rechnung bestätigt die Richtigkeit dieses Verfahrens.

Wir erhalten folgende Gruppen:

A. $\boxed{p,\ \ q,\ \ r,\ \ xp+yq+zr.}$

B. $\boxed{p,\ \ q,\ \ zp+\psi(z)q,\ \ xp+yq.}$

$$\psi=\psi(z) \text{ oder } \psi=\text{const.};$$

im Falle $\psi=\text{const.}$

$$\boxed{p,\ \ q,\ \ zp,\ \ xp+yq.}$$

$$\equiv \boxed{p,\ \ q,\ \ zq,\ \ xp+yq.}$$

C. α) $\boxed{p,\ \ zp,\ \ yp,\ \ xp.}$

β) $X_2f=\varrho\,.\,X_1f,\ \ X_3f=\sigma\,.\,X_1f,\ \ X_4f \mp \tau\,.\,X_1f.$
$$\sigma=\varphi(\varrho).$$

Wir setzen wie früher

$$X_1f=r,\ \ X_2f=xr,\ \ X_3f=\varphi(x)r.$$

Für die Function $\varphi(x)$ und

$$X_4f=\xi p+\eta q+\zeta r$$

kommt durch Bildung der Klammerausdrücke

$$\xi=0,\ \ \eta=\eta(xy),\ \ \zeta=z+\zeta(xy),\ \ \varphi=\varphi(x).$$

Es ist also

$$X_3f=\varphi(x)r,\ \ X_4f=\eta(xy)q+(z+\zeta(xy))r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(xy), \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei

$$\eta(xy)\frac{\partial Y}{\partial y} = 1, \quad \eta(xy)\frac{\partial Z}{\partial y} + Z(xy) + \zeta(xy) = 0$$

ist, erhält unsre Gruppe unter Vertauschung von x mit z die Form:

$$\boxed{p, \quad zp, \quad \varphi(z)p, \quad xp + q.}$$

$\varphi(z)$ arbiträre Function von z, $\neq$ const.

$$\gamma) \quad X_2f = \varrho . X_1f, \quad X_3f = \sigma . X_1f, \quad X_4f = \tau . X_1f.$$

Die Klammerausdrücke liefern

$$X_1\varrho(xyz) = 0, \quad X_1\sigma(xyz) = 0, \quad X_1\tau(xyz) = 1.$$

Die Annahme

$$\sigma \neq \varphi(\varrho)$$

liefert, wie man sich überzeugen kann, wieder die Gruppe C. α.

Setzen wir dagegen

$$\sigma = \varphi(\varrho)$$

voraus, so können wir ρ als x_1, die zweite von ρ unabhängige Lösung der Gleichung $X_1f = 0$ als y_1 benutzen; als z_1 schliesslich die Function τ. Unter Einführung dieser von einander unabhängigen Functionen als neue Veränderliche erhalten wir, wenn wir erst x mit z und dann nochmals z mit y vertauschen, folgende Gruppe der Ebene (xy)

$$\boxed{p, \quad yp, \quad \zeta(y)p, \quad xp.}$$

$\zeta(y)$ ist eine willkürliche Function von y, $\neq$ const.

VIII. $(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_4) = 0,$
$(X_2X_4) = X_1f, \quad (X_3X_4) = X_2f.$

A. $\mu_1X_1f + \mu_2X_2f + \mu_3X_3f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i(xyz).$

Wir setzen:

$$X_1f = p, \quad X_2f = q, \quad X_3f = r.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerausdrücke

$$\xi = y + c_1, \quad \eta = z + c_2, \quad \zeta = c_3.$$
$$X_4 f = (y + c_1) p + (z + c_2) q + c_3 r,$$

oder da die drei Translationen schon einzeln vorkommen,

$$X_4 f = yp + zq.$$

Die Gruppe ist also folgende

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad yp + zq.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$

Hier setzen wir:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \xi p + \eta q.$$

Den Klammerrelationen zufolge ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

also ξ u. η sind frei von x u. y. Setzen wir zunächst

$$\alpha) \quad \xi = \xi(z) \neq \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

voraus, so können wir schreiben

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zp + \tilde{\eta}(z) q.$$

Für die Function $\tilde{\eta}(z)$ und für

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r$$

liefern die Klammerrelationen

$$\xi_1 = y + \xi_1(z), \quad \eta_1 = \eta_1(z), \quad \zeta_1 = \tilde{\eta}(z) = \sqrt{2(\varkappa - z)}.$$
$$X_4 f = (y + \xi_1(z)) p + \eta_1(z) q + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, r.$$
$$X_3 f = zp + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, q.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$x_1 = x + X(z), \quad y_1 = y + Y(z), \quad z_1 = \sqrt{2(\varkappa - z)},$$

wobei

$$\xi_1(z) + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, X_z' - Y(z) = 0, \quad \eta_1(z) + \sqrt{2(\varkappa - z)}\, Y_z' = 0$$

ist, so erhält unsre Gruppe zunächst die Form

$$p, \quad q, \quad \left(\varkappa - \frac{z^2}{2}\right) p + zq, \quad yp - r.$$

Anstatt $X_3 f$ können wir benutzen

$$X_3' f = X_3 f - \varkappa X_1 f = -\frac{z^2}{2} p + zq.$$

Wir haben also die Gruppe

$$\boxed{p, \quad q, \quad -\frac{z^2}{2} p + zq, \quad yp - r.}$$

Die Annahme

$$\beta) \quad \xi = \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \mp \text{const.}$$

führt zu der widersinnigen Forderung

$$1 = 0$$

und ist deshalb auszuschliessen.

C. $X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f.$

$\alpha)$ $X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f \mp \sigma \,.\, X_1 f.$

Wir haben nach früherm

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = q.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerrelationen

$$\xi = -1, \quad \eta = \eta(x), \quad \zeta = xy + \zeta(x),$$
$$X_4 f = -p + \eta(x) q + (xy + \zeta(x)) r.$$

Vermöge der Transformation

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + Y(x), \quad z_1 = z + Z(x),$$

wobei

$$\eta(x) - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \zeta(x) - \frac{\partial Z}{\partial x} - xY = 0$$

ist, und unter Vertauschung von x mit z erhält die Gruppe die Form

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad yzp - r.}$$

Die Möglichkeit, dass X_4f mit X_1f, X_2f, X_3f durch eine lineare Relation verbunden ist, ist wegen der sich ergebenden widersinnigen Forderung

$$\xi = -1 = 0$$

ausgeschlossen.

$$\beta) \quad X_2f = \varrho . X_1f, \quad X_3f = \sigma . X_1f, \quad X_4f \neq \tau . X_1f.$$

Setzen wir

$$\beta_a) \quad \sigma \neq \varphi(\varrho),$$

voraus, so können wir schreiben

$$X_1f = r, \quad X_2f = xr, \quad X_3f = yr.$$

Für

$$X_4f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

erhält man durch Klammeroperation

$$\xi = -1, \quad \eta = -x, \quad \zeta = \zeta(xy),$$

$$X_4f = -p - xq + \zeta(xy)r.$$

Die Transformation

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei die Function $Z(xy)$ bestimmt ist durch

$$\zeta(xy) - \frac{\partial Z}{\partial x} - x\frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

führt unsre Gruppe nach Vertauschung von x mit z in folgende Gestalt über.

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad -(zq + r).}$$

$$\beta_b) \quad \sigma = \varphi(\varrho).$$

Wie früher setzen wir

$$X_1f = r, \quad X_2f = xr, \quad X_3f = \varphi(x)r.$$

Die Klammerausdrücke liefern für die Function φ u. für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

$$\xi = -1, \quad \eta = \eta(xy), \quad \zeta = z(xy), \quad \varphi = \frac{x^2}{2} + \alpha$$

d. h.

$$X_3 f = \frac{x^2}{2} r + \alpha r, \quad X_4 f = -p + \eta(xy) q + \zeta(xy) r.$$

Anstatt $X_3 f$ können wir einfacher benutzen

$$X_3' f = X_3 f - \alpha X_1 f = \frac{x^2}{2} r.$$

Die beiden willkürlichen Functionen η u. ζ in $X_4 f$ verschwinden bei folgender Transformation

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(xy), \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei

$$\eta(xy)\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

$$\zeta(xy) + \eta(xy)\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

ist. Vertauschen wir noch x mit z und dann z mit y, so nimmt die Gruppe die Gestalt an

$$\boxed{p, \quad yp, \quad \frac{y^2}{2} p, \quad -q.}$$

Wir haben also nur eine viergliedrige Gruppe der Ebene erhalten.

γ) $X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f.$

Die Klammerrelationen führen zu der widersinnigen Forderung

$$1 = 0.$$

IX. $(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0, \quad (X_1 X_4) = \alpha X_1 f,$
$(X_2 X_4) = \alpha X_2 f, \quad (X_3 X_4) = \gamma X_3 f. \quad \alpha \neq \gamma.$

Die Klammerrelationen dieses Falles werden mit denen des Falles I identisch, wenn wir dort $\beta = \alpha$ setzen. Wie die Rechnung zeigt, kann man einige Resultate des Falles I verwerten, wenn man einfach $\beta = \alpha$ setzt.

A. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i\,(xyz).$

Wir haben unmittelbar die Gruppe

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad \alpha(xp + yq) + \gamma zr.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$

Wir setzen:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \xi p + \eta q.$$

Für die Grössen ξ u. η in $X_3 f$ haben wir vermöge der Klammerrelationen wie in Fall I 2 Möglichkeiten. Nehmen wir zunächst

$$\alpha) \quad \xi = \xi(z) \neq \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

an, so können wir schreiben:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zp + \bar{\eta}(z) q.$$

Die Rechnung zeigt, dass $X_4 f$ durch keine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_2 f$ verbunden ist, denn sonst müsste

$$\alpha = \gamma$$

sein, was aber wider die Voraussetzung ist. Wir haben demnach

$$X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \zeta_1 \neq 0$$

anzunehmen und erhalten

$$\xi_1 = \alpha x + \xi(z), \quad \eta_1 = \alpha y + \eta(z), \quad \zeta_1 = (\alpha - \gamma) z, \quad \bar{\eta}(z) = \varkappa z.$$

d. h.

$$X_3 f = zp + \varkappa zq, \quad X_4 f = (\alpha x + \xi(z))p + (\alpha y + \eta(z))q + (\alpha - \gamma) zr.$$

Durch passende Transformation der Veränderlichen, vgl. Fall I, können wir unsre Gruppe auf die Form bringen

$$\boxed{p, \quad q, \quad zp + \varkappa zq, \quad \alpha(xp + yq) + (\alpha - \gamma) zr.}$$

$\varkappa \neq 0$, wesentlich.

Für $\varkappa = 0$ erhalten wir

$$\boxed{p, \quad q, \quad zp, \quad \alpha(xp + yq) + (\alpha - \gamma) zr.}$$

Es sei in

$$X_3 f = \xi p + \eta q.$$

$$\beta) \quad \xi = \text{const.}, \quad \eta = \eta(z) \neq \text{const.}$$

Wir können demnach annehmen

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = zq.$$

Der Vergleich mit Fall I B. β) liefert die Gruppe

$$p, \quad q, \quad zq, \quad \alpha(xp + yq + zr) - \gamma zr.$$

Diese Gruppe ist nicht wesentlich verschieden von der Gruppe des Falles B. α) für $\varkappa = 0$.

$$C.\ \alpha)\quad X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f \neq \sigma \,.\, X_1 f.$$

Die Rechnung liefert:

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad \alpha xp + \gamma yq.}$$

$$C.\ \beta_a)\quad X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f = \sigma \,.\, X_1 f, \quad X_4 f \neq \tau X_1 f.$$

$$\sigma \neq \varphi(\varrho).$$

Hier erhalten wir durch Vergleich mit I C. α) die Gruppe

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad \alpha(xp + yq) - \gamma yq.}$$

C. β_b) Die Annahme

$$\sigma = \varphi(\varrho),$$

führt zu dem Widerspruch

$$\alpha = \gamma.$$

Gleichfalls zu dem Widerspruche $\alpha = \gamma$ führt die letzte Annahme

$$\gamma)\quad X_2 f = \varrho \,.\, X_1 f, \quad X_3 f = \sigma \,.\, X_1 f, \quad X_4 f = \tau \,.\, X_1 f.$$

Verschwindet eine der beiden Zahlen α, γ, so ist die erste derivierte Gruppe nur eingliedrig ($\alpha = 0$) oder zweigliedrig ($\gamma = 0$).

Wir haben hiermit alle Typen von viergliedrigen integrabeln Gruppen des Raumes (xyz) mit dreigliedriger Involutionsgruppe bestimmt.

2. Abschnitt.

Wir kommen jetzt zur Bestimmung aller integrabeln viergliedrigen Gruppen des Raumes (xyz) ohne dreigliedrige Involutionsgruppe. Es giebt hier folgende Typen von Zusammensetzungen.

$$\text{X.}\quad (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f, \quad (X_1 X_4) = 2\, X_1 f,$$
$$(X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = 2\, X_2 f + X_3 f.$$

$$\text{A.}\quad \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i (xyz).$$

Dann muss

$$X_4 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f + \varphi_3 X_3 f$$

sein. Vermöge der Klammerausdrücke ist

$$(X_1 X_4) \equiv X_1 \varphi_1 X_1 f + X_1 \varphi_2 X_2 f + \varphi_2 (X_1 X_2) + X_1 \varphi_3 X_3 f + \varphi_3 (X_1 X_3) = 2 X_1 f,$$
$$(X_2 X_4) \equiv X_2 \varphi_1 X_1 f - \varphi_1 (X_1 X_2) + X_2 \varphi_2 X_2 f + X_2 \varphi_3 X_3 f + \varphi_3 (X_2 X_3) = X_2 f,$$
$$(X_3 X_4) \equiv X_3 \varphi_1 X_1 f - \varphi_1 (X_1 X_3) + X_3 \varphi_2 X_2 f - \varphi_2 (X_2 X_3) + X_3 \varphi_3 X_3 f = 2 X_2 f + X_3 f.$$

Da aber nach A) keine Relation zwischen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ bestehen soll, so müssen die Coëffizienten von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ verschwinden. Es ergeben sich dabei folgende Werte der $X_i \varphi_\varkappa$ ($i, \varkappa = 1, 2, 3.$)

$$\begin{array}{lll} X_1 \varphi_1 = 2, & X_1 \varphi_2 = 0, & X_1 \varphi_3 = 0, \\ X_2 \varphi_1 = - \varphi_3, & X_2 \varphi_2 = 1, & X_2 \varphi_3 = 0, \\ X_3 \varphi_1 = \varphi_2, & X_3 \varphi_2 = 2, & X_3 \varphi_3 = 1. \end{array}$$

Hiernach sind die φ_i ($i = 1, 2, 3$) sicher keine Constanten; sie sind auch durch keine Relation mit einander verbunden. Denn gesetzt, es sei

$$\Omega (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = 0,$$

so müsste nach den in Fall I angestellten Betrachtungen die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\varphi_3 & 1 & 0 \\ \varphi_2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

verschwinden, was aber widersinnig ist. Wir dürfen deshalb φ_1, φ_2, φ_3 als neue Veränderliche x_1, y_1, z_1 benutzen und in die $X_i f$ ($i = 1, 2, 3$) einführen. Es kommt

$$X_1 f = 2p, \quad X_2 f = -zp + q, \quad X_3 f = yp + 2q + r,$$
$$X_4 f = 2xp + (y + 2z) q + zr.$$

Führen wir $x_1 = \frac{x}{2}$ als neues x_1 ein, so nimmt unsre Gruppe folgende Gestalt an:

$$\boxed{p, \quad -\frac{z}{2} p + q, \quad \frac{y}{2} p + 2q + r, \quad 2xp + (y + 2z) q + zr.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$

Aus den Klammerausdrücken leiten wir ab

$$X_1 \varphi_1 = 0, \quad X_1 \varphi_2 = 0,$$
$$X_2 \varphi_1 = 1, \quad X_2 \varphi_2 = 0.$$

φ_1 ist sicher keine Constante, dasselbe wollen wir zunächst von φ_2 annehmen, also

α) $\varphi_2 \neq$ const.

Bei dieser Voraussetzung sind φ_2 u. φ_1 durch keine Relation gebunden. Wir können deshalb φ_1 als x_1, φ_2 die gemeinsame Lösung von $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ als y_1 benutzen und ein neues z_1 so bestimmen, dass

$$X_1 z_1 = 1, \quad X_2 z_1 = 0$$

wird. Führen wir x_1 y_1 z_1 als neue Veränderliche ein, so kommt

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = p, \quad X_3 f = yp + xr.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerausdrücke

$$\xi = x, \quad \eta = -2, \quad \zeta = 2z + \zeta(y),$$
$$X_4 f = xp - 2q + (2z + \zeta(y)) r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(y),$$

wobei die Function Z(y) durch

$$-\zeta(y)+2Z(y)+2\frac{\partial Z}{\partial y}=0$$

bestimmt ist, nimmt die Gruppe, wenn wir erst x mit z, und dann z mit y vertauschen, die Form an

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp+zq, \quad 2xp+yq-2r.}$$

β) Es sei

$$\varphi_2 = \text{const.}$$

Wir benutzen wieder φ_1 als x_1, die gemeinsame Lösung von $X_1f=0$, $X_2f=0$ als y_1, und z_1 bestimmen wir so, dass

$$X_1z_1=1, \quad X_2z_1=0$$

wird. Durch Einführung dieser neuen Veränderlichen kommt:

$$X_1f=r, \quad X_2f=p, \quad X_3f=xr+\text{const.}\,p,$$

oder einfacher:

$$X_1f=r, \quad X_2f=p, \quad X_3f=xr.$$

Beide für X_4f möglichen Annahmen

$$X_4f=\xi p+\eta q+\zeta r, \quad \eta \neq 0,$$

und

$$X_4f=\xi p+\zeta r$$

sind nicht zu erfüllen; $\varphi_2=$ const. ist demnach auszuschliessen.

C. $X_2f=\varrho\,.\,X_1f$, $\quad X_3f \neq \sigma\,.\,X_1f$.

Durch Klammerrelation $(X_1X_2)=0$ erhält man

$$X_1\varrho=0.$$

ρ ist verschieden von const., sonst wären X_1f u. X_2f nicht unabhängig. Diese Function $\rho(xyz)$ benutzen wir als x_1, als y_1 dagegen die zweite von ρ unabhängige Lösung der Gleichung $X_1f=0$, und z_1 bestimmen wir so, dass

$$X_1z_1=1$$

wird. $x_1\ y_1\ z_1$ sind unabhängig von einander; führen wir sie als neue Veränderliche ein, so kommt:

$$X_1f=r, \quad X_2f=xr.$$

Für

$$X_3 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerausdrücke $(X_1 X_3) = 0$, $(X_2 X_3) = X_1 f$

$$\xi = -1, \quad \eta = \eta(xy), \quad \zeta = \zeta(xy).$$

$$X_4 f = -p + \eta(xy) q + \zeta(xy) r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(xy), \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei

$$\eta \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \eta \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + \zeta = 0$$

ist, erhalten wir zunächst

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = xr, \quad X_3 f = -p.$$

Die infinitesimale Transformation $X_4 f$ sei durch keine lineare Relation mit $X_1 f$, $X_3 f$ verbunden, sondern habe die Form

$$\alpha) \quad X_4 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \quad \eta_1 \neq 0.$$

Vermöge der Klammerausdrücke wird

$$\xi_1 = x, \quad \eta_1 = \eta_1(y), \quad \zeta_1 = 2z - x^2 + \zeta_1(y),$$

$$X_4 f = xp + \eta_1(y) q + (2z - x^2 + \zeta_1(y)) r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(y), \quad z_1 = z + Z(y),$$

wobei

$$\eta_1 \frac{\partial Y}{\partial y} = 1, \quad \zeta_1 + \eta_1 \frac{\partial Z}{\partial y} - 2Z(y) = 0$$

ist, erhalten wir nach Vertauschung von x mit z die Gruppe

$$\boxed{p, \quad zp, \quad -r, \quad (2x - z^2) p + q + zr.}$$

β) Setzen wir

$$X_4 f = \xi_1 p + \zeta_1 r, \quad \text{also } \eta_1 = 0,$$

so erhalten wir offenbar die Gruppe

$$p, \quad zp, \quad -r, \quad (2x - z^2) p + zr,$$

oder wenn wir z mit y vertauschen, folgende Gruppe der Ebene (x y)

$$\boxed{p, \quad yp, \quad -q, \quad (2x-y^2)p+yq.}$$

γ) Die Annahmen

$$X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f$$

und noch mehr die folgenden

$$X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f$$

führen zu Widersprüchen.

XI. $(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f, \quad (X_1 X_4) = c X_1 f,$
$(X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = (c-1) X_3 f. \quad c \neq 1.$

A. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i(xyz).$
$X_4 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f + \varphi_3 X_3 f.$

Die Klammerrelationen liefern

$$\begin{aligned} X_1 \varphi_1 &= c, & X_1 \varphi_2 &= 0, & X_1 \varphi_3 &= 0, \\ X_2 \varphi_1 &= -\varphi_3, & X_2 \varphi_2 &= 1, & X_2 \varphi_3 &= 0, \\ X_3 \varphi_1 &= \varphi_2, & X_3 \varphi_2 &= 0, & X_3 \varphi_3 &= c-1. \end{aligned}$$

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ -\varphi_3 & 1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & c-1 \end{vmatrix} = c(c-1).$$

Wir sehen hieraus, wegen $c \neq 1$, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sicher keine Constanten sind und wollen zunächst voraussetzen, dass sie durch keine Relation gebunden sind.

$$\alpha) \quad \varphi_3 \neq \omega(\varphi_2 \varphi_1), \quad c \neq 0.$$

Sicher sind φ_2 u. φ_1 durch keine Relation gebunden, denn sonst müsste

$$\varphi_2 = 0$$

sein, was der Gleichung

$$X_2 \varphi_2 = 1$$

widerspricht. Unter der Voraussetzung α) können wir demnach $\varphi_1 = x_1$, $\varphi_2 = y_1$, $\varphi_3 = z_1$ als neue Veränderliche einführen und erhalten:

$$X_1 f = cp, \quad X_2 f = -zp + q, \quad X_3 f = yp + (c-1) r,$$
$$X_4 f = cxp + yq + (c-1) zr.$$

Wir führen $x_1 = \frac{x}{c}$, $y_1 = \frac{y}{c}$, $z = -\frac{z}{c}$, als neue Veränderliche ein und erhalten die Gruppe

$p, \quad zp + \frac{1}{c} q, \quad yp + \frac{1-c}{c} r, \quad cxp + yq + (1-c) zr.$

Wir nehmen an

$$\beta) \quad \varphi_3 = \omega(\varphi_2 \varphi_1), \quad c = 0.$$

Zunächst können wir wieder φ_1 als x_1, φ_2 als y_1 benutzen, während z_1 so bestimmt werden kann, dass

$$X_1 z_1 = 1, \quad X_2 z_1 = x_1, \quad X_3 z_1 = y_1$$

wird. z_1 ist sicher durch keine Relation mit y_1 u. x_1 verbunden, denn gesetzt, es sei

$$z_1 = \vartheta(x_1 y_1),$$

so würde folgen

$$X_1 (z_1 - \vartheta(x_1 y_1)) = 0, \quad 1 = 0$$

was widersinnig ist. Unter Einführung von x_1, y_1, z_1 als neuer Veränderlicher kommt

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = -\varphi_3 p + q + yr, \quad X_3 f = yp + yr,$$
$$X_4 f = yq + (x + y \cdot \varphi_3 + y^2) r.$$

Die Function φ_3 also hat folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$X_1 \varphi_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \quad X_2 \varphi_3 = -\varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + y \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0,$$

$$X_3 \varphi_3 = y \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -1.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = -\frac{1}{y}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = -\frac{\varphi_3}{y}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0.$$

$$\varphi_3 = (\alpha - x) \cdot y^{-1}.$$

Die Transformationen lauten demnach

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = (x - \alpha) y^{-1} p + q + yr, \quad X_3 f = yp + yr,$$
$$X_4 f = yq + (y^2 + \alpha) r.$$

Anstatt X_4f können wir benutzen

$$X_4'f = X_4f - \alpha X_1f = yq + y^2r.$$

Führen wir schliesslich $x - \alpha$ als x_1 ein und vertauschen noch x_1 mit z_1, so erhält die Gruppe die Form

$$\boxed{p, \quad yp + q + zy^{-1}r, \quad yp + yr, \quad y^2p + yq.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0, \quad X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f.$

Die Klammerrelationen liefern

$$X_1\varphi_1 = 0, \quad X_1\varphi_2 = 0,$$
$$X_2\varphi_1 = 1, \quad X_2\varphi_2 = 0.$$

φ_1 ist also keine Constante; dasselbe wollen wir zunächst von φ_2 annehmen.

α) $\varphi_2 \neq$ const.

Nach Fall X. B. α) können wir erreichen, dass

$$X_1f = r, \quad X_2f = p, \quad X_3f = yp + xr$$

wird. X_4f sei zunächst durch keine lineare Relation mit X_1f u. X_2f verbunden, sondern habe die allgemeine Form

α_a) $X_4f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \eta \neq 0.$

Die Klammerrelationen liefern

$$\xi = x, \quad \eta = (2 - c)y, \quad \zeta = cz + \zeta(y),$$
$$X_4f = xp + (2 - c)y + (cz + \zeta(y))r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(y),$$

wobei

$$(2 - c)\, y \frac{\partial Z}{\partial y} + \zeta(y) - cZ(y) = 0$$

ist, erhalten wir nach Vertauschung von z mit y, und dann von y mit x die Gruppe

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp + zq, \quad cxp + yq + (2 - c)zr.}$$

α_b) X_4f habe die Form

$$X_4f = \xi p + \zeta r.$$

Wir haben demnach im Falle α_a)

$$\eta = (2 - c)y = 0, \quad c = 2$$

zu setzen, d. h. nur wenn $c = 2$ ist, ist $X_4 f$ durch eine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_2 f$ verbunden. Da aber c alle Werte ausser $c = 1$ annehmen kann, so ist dieser Fall α_b in Fall α_a mit enthalten.

β) Es sei

$$\varphi_2 = \text{const.}$$

Nach Fall X. B. β) können wir setzen

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = p, \quad X_3 f = xr.$$

Für

$$\beta_a) \quad X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \eta \neq 0$$

ergeben die Klammerausdrücke

$$\xi = x, \quad \eta = \eta(y), \quad \zeta = cz + \zeta(y),$$

$$X_4 f = xp + \eta(y) q + (cz + \zeta(y)) r.$$

Bei der Variabelnänderung

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(y), \quad z_1 = z + Z(y),$$

wobei

$$\eta(y) \frac{\partial Y}{\partial y} = 1, \quad \zeta(y) + \eta(y) \frac{\partial Z}{\partial y} - cZ(y) = 0$$

ist, erhält die Gruppe unter Vertauschung von z mit y, und dann von y mit x die Form

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp, \quad cxp + yq + r.}$$

β_b) Setzen wir

$$X_4 f = \xi p + \zeta r,$$

so ist in Fall β_a die willkürliche Function

$$\eta(y) = 0$$

anzunehmen, wir erhalten also die Gruppe

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp, \quad cxp + yq.}$$

Wir haben also nur eine Gruppe der Ebene (xy) erhalten.

C. $X_2 f = \varrho . X_1 f$.

α) $X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f \neq \sigma . X_2 f$.

Nach X C. können wir annehmen

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = x r, \quad X_3 f = - p.$$

Für

$$\alpha_a) \quad X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \eta \neq 0$$

erhalten wir durch Berechnung der Klammerausdrücke

$$\xi = (c-1)x, \quad \eta = \eta(y), \quad \zeta = cz + \xi(y),$$
$$X_4 f = (c-1)x + \eta(y) q + (cz + \zeta(y)) r.$$

Durch eine passende Variabelnänderung

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(y), \quad z_1 = z + Z(y),$$

wobei

$$\eta \frac{\partial Y}{\partial y} = 1, \quad \eta \frac{\partial Z}{\partial y} + \zeta - c Z(y) = 0$$

ist, und unter Vertauschung von x mit z erhalten wir folgende Gruppe

$$\boxed{p, \quad zp, \quad -r, \quad cxp + q + (c-1)zr.}$$

α_b) Soll

$$X_4 f = \xi p + \zeta r$$

sein, so haben wir in Fall α_a) die willkürliche Function

$$\eta(y) = 0$$

zu setzen, wir erhalten offenbar folgende Gruppe (der Ebene (xy))

$$\boxed{p, \quad yp, \quad -q, \quad cxp + (c-1)yq.}$$

β) Die beiden noch möglichen Annahmen

$$X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f$$

und

$$X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f$$

sind nicht zu erfüllen.

XII. $(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f, \quad (X_1 X_4) = X_1 f,$
$(X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = 0.$

Diese Zusammensetzungen werden mit denen des Falles XI identisch, wenn wir dort $c = 1$ setzen. Wie die Rechnung bestätigt, kann man die Resultate von XI mit Ausnahme des Falles A), den wir besonders berechnen müssen, benutzen und die entsprechenden Gruppen des Falles XII hinschreiben, wenn man in Fall XI $c = 1$ setzt.

$$\text{A.} \quad \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i (xyz).$$

$$X_4 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f + \varphi_3 X_3 f.$$

Die Klammerrelationen liefern

$$\begin{array}{lll} X_1 \varphi_1 = 1, & X_1 \varphi_2 = 0, & X_1 \varphi_3 = 0, \\ X_2 \varphi_1 = -\varphi_3, & X_2 \varphi_2 = 1, & X_2 \varphi_3 = 0, \\ X_3 \varphi_1 = \varphi_2, & X_3 \varphi_2 = 0, & X_3 \varphi_3 = 0. \end{array}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\varphi_3 = \text{const.},$$

denn die 3 partiellen Differentialgleichungen $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$, $X_3 f = 0$ können in x, y, z keine gemeinsame Lösung besitzen. Ausserdem sind φ_2 u. φ_1, die sicher keine Constanten sind, durch keine Relation verbunden. Denn gesetzt es sei

$$\varphi_2 = \vartheta(\varphi_1),$$

so müsste sein

$$X_1 (\varphi_2 - \vartheta(\varphi_1)) = X_1 \varphi_2 - \vartheta'_{\varphi_1} X_1 \varphi_1 = \vartheta'_{\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = 0, \quad \varphi_2 = \text{const.},$$

was aber im Widerspruche ist mit

$$X_2 \varphi_2 = 1.$$

Wir können daher φ_1 als x_1, φ_2 als y_1 benutzen; z_1 lässt sich so bestimmen, dass

$$X_1 z_1 = 0, \quad X_2 z_1 = 0, \quad X_3 z_1 = 1$$

wird. Dabei ist z_1 durch keine Relation mit x_1, y_1 verbunden. Unter Benutzung dieser neuen Veränderlichen kommt

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = -\text{const.}\, p + q, \quad X_3 f = yp + r,$$
$$X_4 f = xp + yq + \text{const.}\, r.$$

Anstatt $X_2 f$ benutzen wir

$$X_2' f = X_2 f + \text{const.}\, X_1 f = q.$$

Wir haben somit die Gruppe

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp + r, \quad xp + yq + \varkappa r.}$$

Ist $\varkappa \neq 0$, so ist es wesentlich. Für $\varkappa = 0$ haben wir

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp + r, \quad xp + yq.}$$

B. Wir erhalten folgende Gruppen

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp + zq, \quad xp + yq + zr.}$$

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp, \quad xp + yq + r.}$$

$$\boxed{p, \quad q, \quad yp, \quad xp + yq.}$$

Transformationen der Ebene (xy).

C.

$$\boxed{p, \quad zp, \quad -r, \quad xp + q,}$$

$$\boxed{p, \quad yp, \quad -q, \quad xp.}$$

Transformationen der Ebene (xy).

XIII. $(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_2 f, \quad (X_1 X_4) = X_1 f,$
$(X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = 0.$

A. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \mu_3 X_3 f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i(xyz).$
$X_4 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f + \varphi_3 X_3 f.$

Durch Combination erhalten wir

$$\begin{array}{lll} X_1 \varphi_1 = 1, & X_1 \varphi_2 = \quad 0, & X_1 \varphi_3 = 0, \\ X_2 \varphi_1 = 0, & X_2 \varphi_2 = -\varphi_3, & X_2 \varphi_3 = 0, \\ X_3 \varphi_1 = 0, & X_3 \varphi_2 = \quad \varphi_2, & X_3 \varphi_3 = 0. \end{array}$$

Hiernach ist sicher

$$\varphi_1 = \varphi_1(xyz) \neq \text{const.}$$

Zugleich ist von vornherein ausgeschlossen, dass

$$\varphi_2 = \text{const.} \neq 0$$

sein kann. Wohl aber kann

$$\varphi_2 = 0$$

sein, und dann ist wegen $X_2\varphi_2 = -\varphi_3$ auch

$$\varphi_3 = 0$$

Wir haben deshalb mehrere Fällen zu unterscheiden.

$$\alpha) \quad \varphi_3 = \varkappa \neq 0.$$

Wegen $X_2\varphi_2 = -\varkappa$ ist $\varphi_2 = \varphi_2(xyz) \neq 0$, ausserdem sind φ_1 u. φ_2 durch keine Relation gebunden. Denn gesetzt

$$\varphi_2 = \vartheta(\varphi_1),$$

so müssten die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varphi_3 \\ 0 & \varphi_2 \end{vmatrix}$$

sämtlich verschwinden, d. h. es müsste sein

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \varkappa = 0,$$

was wir ja eben ausgeschlossen haben. Bestimmen wir dann noch eine Function $z_1(xyz)$ so, dass

$$X_1 z_1 = 0, \quad X_2 z_1 = 0, \quad X_3 z_1 = 1$$

wird, so können wir x_1, y_1, z_1 als neue Veränderliche einführen und erhalten

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = -\varkappa q, \quad X_3 f = yq + r, \quad X_4 f = xp + \varkappa r.$$

Anstatt $X_2 f$ benutzen wir

$$X_2' f = -\frac{1}{\varkappa} X_2 f = q.$$

Unsre Gruppe hat also die Form

$$\boxed{p, \quad q, \quad yq + r, \quad xp + \varkappa r.}$$

Die Constante $\varkappa$ ist wesentlich.

$$\beta) \quad \varphi_3 = \varkappa = 0.$$

In diesem Falle haben wir noch zwei Möglichkeiten.

$\beta_a)$ $\varphi_2 = 0$, $\beta_b)$ $\varphi_2 = \varphi_2(xyz) \neq 0$.

$\beta_a)$ $\varphi_2 = 0$.

Die Function φ_1 benutzen wir als x_1, während wir y_1 u. z_1 so bestimmen können, dass

$$X_1 y_1 = 0, \quad X_2 y_1 = 0, \quad X_3 y_1 = 1.$$
$$X_1 z_1 = 0, \quad X_2 z_1 = 1, \quad X_3 z_1 = z_1.$$

wird. Unter diesen Voraussetzungen sind x_1, y_1, z_1 durch keine Relation gebunden. Führen wir sie als neue Veränderliche ein, so erhalten wir, wenn noch y_1 mit z_1 vertauscht wird, die Gruppe

$$p, \quad q, \quad yq + r, \quad xp.$$

Diese Gruppe ist aber in Fall α enthalten, wenn wir dort für x den Wert $x = 0$ mit zulassen.

$\beta_b)$ $\varphi_2 = \varphi_2(xyz) \neq 0$.

Wir benutzen φ_1 als x_1, φ_2 als y_1, z_1 dagegen bestimmen wir so, dass

$$X_1 z_1 = 0, \quad X_2 z_1 = 1, \quad X_3 z_1 = z_1$$

wird. z_1 ist durch keine Relation mit x_1 y_1 verbunden, denn gesetzt es sei:

$$z_1 = \vartheta(x_1 y_1),$$

so müsste die Determinante

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ z_1 & y_1 & 0 \end{vmatrix} = y_1 = \varphi_2$$

verschwinden, was wir aber ausgeschlossen haben. Durch Einführung dieser Functionen x_1, y_1, z_1 als neuer Veränderlicher erhalten wir, wenn schliesslich noch z mit y vertauscht wird, die Gruppe

$$\boxed{p, \quad q, \quad yq + zr, \quad xp + zq.}$$

B. $\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f \neq 0$, $X_3 f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f$.

Die Klammerausdrücke $(X_1 X_3) = 0$, $(X_2 X_3) = X_2 f$ liefern

$$X_1 \varphi_1 = 0, \quad X_1 \varphi_2 = 0,$$
$$X_2 \varphi_1 = 0, \quad X_2 \varphi_2 = 1.$$

φ_2 ist also sicher keine Constante, dasselbe sei mit φ_1 der Fall, also

$$\alpha)\quad \varphi_1 \neq \text{const.}$$

Unter dieser Voraussetzung sind φ_1 u. φ_2 durch keine Relation mit einander verbunden; wir führen $\varphi_1 = x_1$, $\varphi_2 = y_1$, $z_1 = z_1(xyz)$, wobei z_1 bestimmt ist durch

$$X_1 z_1 = 1, \quad X_2 z_1 = 0,$$

als neue Veränderliche ein, und erhalten

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = xr + yq.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerausdrücke

$$\xi = x, \quad \eta = 0, \quad \zeta = z + \zeta(x),$$
$$X_4 f = xp + (z + \zeta(x)) r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(x),$$

wobei

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} + \zeta(x) - Z(x) = 0$$

ist, erhalten wir, wenn schliesslich noch z_1 mit x_1 vertauscht wird, die Gruppe

$$\boxed{p, \quad q, \quad zp + yq, \quad xp + zr.}$$

β) Es sei

$$\varphi_1 = \text{const.}$$

Wir benutzen φ_2 als y_1, die gemeinsame Lösung von $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ als x_1, z_1 bestimmen wir wieder wie vorhin, so dass

$$X_1 z_1 = 1, \quad X_2 z_1 = 0$$

wird. Durch Einführung dieser Functionen $x_1\, y_1\, z_1$ als neuer Veränderlicher erhalten wir

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = \text{const.}\, r + yq.$$

Anstatt X_3f benutzen wir einfacher

$$X_3'f = X_3f - \text{const.}\, X_1f = yq.$$

β_a) X_4f sei zunächst durch keine lineare Relation mit X_1f u. X_2f verbunden, sondern habe die allgemeine Form

$$X_4f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \xi \neq 0.$$

Die Klammerrelationen ergeben

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = 0, \quad \zeta = z + \zeta(x),$$
$$X_4f = \xi(x)p + (z + \zeta(x))r.$$

Durch die Variabelnänderung

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z + Z(x),$$

wo

$$\xi(x)\frac{\partial Z}{\partial x} + \zeta(x) - Z(x) = 0$$

ist, erhalten wir nach Vertauschung von z mit x die Gruppe:

$$\boxed{p, \quad q, \quad yq, \quad xp + r.}$$

Verlangen wir dagegen

$$\beta_b) \quad X_4f = \eta q + \zeta r,$$

so erhalten wir offenbar die Gruppe (der Ebene xy)

$$\boxed{p, \quad q, \quad yq, \quad xp.}$$

C. $X_2f = \varrho \,.\, X_1f.$

α) $X_2f = \varrho \,.\, X_1f, \quad X_3f \neq \sigma \,.\, X_1f.$

Nach früher können wir zunächst annehmen

$$X_1f = r, \quad X_2f = xr.$$

Für

$$X_3f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

liefern die Klammerausdrücke

$$\xi = -x, \quad \eta = \eta(xy), \quad \zeta = \zeta(xy).$$
$$X_3f = -xp + \eta(xy)q + \zeta(xy)r.$$

Vermöge einer passenden Variabelnänderung

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(xy), \quad z_1 = z + Z(xy),$$

wobei

$$\eta \frac{\partial Y}{\partial y} - x \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

$$\zeta + \eta \frac{\partial Z}{\partial y} - x \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

ist, geht $X_3 f$ über in

$$X_3 f = -xp.$$

α_a) $X_4 f$ sei zunächst durch keine lineare Relation mit $X_1 f$ u. $X_3 f$ verbunden, sondern habe die allgemeine Form

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \eta \neq 0.$$

Die Klammerausdrücke ergeben

$$\xi = x, \quad \eta = \eta(y), \quad \zeta = z + \zeta(y),$$
$$X_4 f = xp + \eta(y) q + (z + \zeta(y)) r.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(y), \quad z_1 = z + Z(y),$$

wobei

$$\eta \frac{\partial Y}{\partial y} = 1, \quad \zeta + \eta \frac{\partial Z}{\partial y} - Z(y) = 0$$

ist, und vertauschen schliesslich z_1 mit x_1, so haben wir die Gruppe

$$\boxed{p, \quad zp, \quad -zr, \quad xp + q + zr.}$$

α_b) Verlangen wir

$$X_4 f = \xi p + \zeta r,$$

so haben wir in Fall α_a die willkürliche Function

$$\eta(y) = 0$$

zu setzen, und erhalten offenbar nach Vertauschung von z mit y die folgende Gruppe der Ebene (xy)

$$\boxed{p, \quad yp, \quad -yq, \quad xp + yq.}$$

β) Die Annahmen

$$X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f$$

und

$$X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f$$

führen zu den Forderungen

$$\varrho = 0, \quad \sigma = 0$$

und sind deshalb unmöglich.

Hiermit sind alle viergliedrigen integrabeln Gruppen des Raumes (xyz) ohne dreigliedrige Involutionsgruppe bestimmt.

---

3. Abschnitt.

Bestimmung aller nicht-integrabeln viergliedrigen Gruppen des Raumes (xyz)

Nach Lie, Contin. Gruppen S. 577, haben wir hier nur einen Typus von Zusammensetzungen. „Jede nicht-integrable viergliedrige Gruppe lässt sich durch passende Auswahl ihrer infinitesimalen Transformationen X_1f, X_2f, X_3f, X_4f auf eine solche Form bringen, dass

$$(X_1X_2) \equiv X_1f, \quad (X_1X_3) \equiv 2X_2f, \quad (X_2X_3) \equiv X_3f,$$
$$(X_1X_4) \equiv (X_2X_4) \equiv (X_3X_4) = 0$$

wird."

$$\text{A.} \quad \mu_1X_1f + \mu_2X_2f + \mu_3X_3f \neq 0, \quad \mu_i = \mu_i(xyz).$$

Lie hat gezeigt, dass man in diesem Falle durch passende Einführung neuer Veränderlicher die drei Transformationen X_1f, X_2f, X_3f z. B. auf folgende Formen bringen kann:

$$X_1f = q + xr, \quad X_2f = yq + zr, \quad X_3f = (xy - z)p + y^2q + yzr.$$

Diese drei infinites. Transformationen bilden eine dreigliedrige projective Gruppe, die einfach transitiv ist und, wie die Formel

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & y & z \\ xy - z & y^2 & yz \end{vmatrix} = -(xy - z)^2$$

lehrt, die Fläche zweiten Grades

$$xy - z = 0$$

invariant lässt. Die Aufgabe verlangt, eine vierte Transformation

$$X_4f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

zu berechnen, die mit X_1f, X_2f, X_3f vertauschbar ist. Die Transformation aber, die diese Bedingung erfüllt, ist die all-

gemeine infinitesimale Transformation Yf der zu X_1f, X_2f, X_3f reciproken einfach transitiven Gruppe*)

$$Y_1f = p + yr, \quad Y_2f = xp + zr, \quad Y_3f = x^2p + (xy - z)q + xzr.$$

Unsre gesuchte Transformation X_4f hat also die Form

$$X_4f = (e_1 + e_2x + e_3x)^2p + e_3(xy - z)q + (e_1y + e_2z + e_3xz)r.$$

Wir müssen nun versuchen, die Constanten e_1, e_2, e_3 zu specialisieren und bemerken dazu folgendes:

Führen wir vermöge einer endlichen Transformation der eingliedrigen Gruppe X_4f, die offenbar die Form hat

$$x_1 = x_1(xyzabc), \quad y_1 = y_1(xyzabc), \quad z_1 = z_1(xyzabc)$$

neue Veränderliche in X_1f, X_2f, X_3f ein, so bleiben, eben weil ja X_1f, X_2f, X_3f mit X_4f vertauschbar sind, die Formen von X_1f, X_2f, X_3f bewahrt. X_4f selbst, das ja die Form

$$X_4f = e_1Y_1f + e_2Y_2f + e_3Y_3f$$

hat, geht etwa über in

$$X_4'f = \varepsilon_1Y_1f + \varepsilon_2Y_2f + \varepsilon_3Y_3f$$

geschrieben in x_1, y_1, z_1. Dabei werden sich die ε_i als Functionen der e_i und der Parameter a, b, c ausdrücken

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(e_1e_2e_3abc), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(e_1e_2e_3abc), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(e_1e_2e_3abc).$$

Diese Transformationen bilden bekanntlich die zu Y_1f, Y_2f, Y_3f adjungierte Gruppe. Durch passende Wahl der Parameter a, b, c wird es uns möglich sein, die ε_i zu specialisieren, und wir haben dabei zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich je nachdem

$$1. \ e_2^2 - 4e_1e_3 = 0, \qquad 2. \ e_2^2 - 4e_1e_3 \neq 0.$$

*) Lie, Vorlesungen über Cont. Gruppen, S. 444, Theorem 31. „Sind $X_1f, \ldots X_nf$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer einfach transitiven Gruppe in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, so definieren die n Gleichungen $(X_iU) \equiv 0$ die allgemeine infinitesimale Transformation Uf einer zweiten einfach transitiven Gruppe $U_1f \ldots U_nf$, die mit der Gruppe $X_1f \ldots X_nf$ gleichzusammengesetzt und ähnlich ist. Die Beziehung zwischen diesen beiden Gruppen ist eine umkehrbare: jede der beiden Gruppen besteht aus dem Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen, deren Transformationen mit jeder Transformation der anderen Gruppe vertauschbar sind."

Diese zwei Fälle unterscheiden wir aus folgendem Grunde: Während $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ die auf der Fläche $xy - z = 0$ eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit bildenden Geraden $x =$ const. einzeln invariant lassen, vertauscht $X_4 f$ diese Geraden untereinander vermöge der projectiven infinitesimalen Transformation

$$\overline{X}_4 f = (e_1 + e_2 x + e_3 x^2) p.$$

Bei jeder bestimmten Transformation $\overline{X}_4 f$ bleiben nun entweder eine doppeltzählende Gerade $x = c$; oder aber zwei verschiedene Geraden $x = c_1$, $x = c_2$ invariant, je nachdem der 1. oder 2. Fall eintritt. Es ist aber bekannt, dass alle infinitesimalen Transformationen $e_1 p + e_2 x p + e_3 x^2 p$ mit einander gleichberechtigt sind, für die $e_2^2 - 4 e_1 e_3 = 0$, und ebenso alle anderen, für die $e_2^2 - 4 e_1 e_3 \neq 0$.

Um die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe $X_4 f$ zu finden, müssten wir das simultane System

$$\frac{dx_1}{e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_1^2} = \frac{dy_1}{e_3(x_1 y_1 - z_1)} = \frac{dz_1}{e_1 y_1 + e_2 z_1 + e_3 x_1 z_1} = dt$$

integrieren mit der Anfangsbedingung $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ für $t = 0$. Da aber diese Integration durch endliche geschlossene Ausdrücke ziemliche Schwierigkeiten darbietet, verfahren wir folgendermassen: Es soll ja nach Einführung der neuen Veränderlichen x_1, y_1, z_1 in $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ sein:

$$\begin{aligned} q + xr &\equiv q_1 + x_1 r_1, \\ yq + zr &\equiv y_1 q_1 + z_1 r_1. \\ (xy - z)p + y^2 q + yzr &\equiv (x_1 y_1 - z_1)p_1 + y_1^2 q_1 + y_1 z_1 r_1, \end{aligned}$$

Führt man links wirklich x_1, y_1, z_1 als neue Veränderliche ein, so ergeben sich neun Gleichungen für die Ableitungen von x_1, y_1, z_1 nach x, y, z. Lösen wir nach diesen Ableitungen auf, so erhalten wir folgende Werte:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{x_1 y_1 - z_1}{xy - z}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{y_1 (y_1 - y)}{xy - z}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{x y_1 - z}{xy - z}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z} = \frac{y - y_1}{xy - z},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{z_1 (y_1 - y)}{xy - z}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{x z_1 - z x_1}{xy - z}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z} = \frac{x_1 y - z_1}{xy - z}.$$

Durch einfache Integrationen erhalten wir

$$x_1 = \frac{a + bx}{1 - cx}, \quad y_1 = \frac{y - cz}{1 - cx}, \quad z_1 = \frac{ay + bz}{1 - cx}.$$

Führen wir diese Functionen als neue Veränderliche ein, so behalten X_1f, X_2f, X_3f ihre Form bei. Führen wir $x_1\, y_1\, z_1$ auch in X_4f ein, und ersetzen die noch vorkommenden Grössen xyz durch ihre Werte

$$x = \frac{x_1 - a}{b + cx_1}, \quad y = \frac{by_1 + cz_1}{b + cx_1}, \quad z = \frac{z_1 - ay_1}{b + cx_1},$$

so erhalten wir durch Vergleich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (e_1 b^2 - e_2 ab + e_3 a^2) : (ac + b) \\ \varepsilon_2 &= (2 e_1 bc + e_2 (b - ac) - 2 a e_3) : (ac + b) \\ \varepsilon_3 &= (e_1 c^2 + e_2 c + e_3) : (ac + b). \end{aligned} \qquad -\varDelta = ac + b. \neq 0$$

$\varDelta \neq 0$, weil sonst x_1, y_1, z_1 nicht nach x, y, z auflösbar wären und also keine wirkliche Transformationen darstellten. Zunächst können wir immer erreichen, dass ε_3 verschwindet, indem wir setzen

$$c = \frac{-e_2 \pm \sqrt{e_2^2 - 4 e_1 e_3}}{2 e_1}, \qquad \varepsilon_3 = 0.$$

1. Setzen wir zunächst

$$D^2 \equiv e_2^2 - 4 e_1 e_3 = 0,$$
$$c = - e_2 : 2 e_1, \qquad e_1 \neq 0,$$

so erhalten wir

$$\varepsilon_2 (ac + b) = 2 e_1 bc + e_2 (b - ac) - 2 a e_3 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0,$$
$$\varepsilon_1 = e_1 (ac + b) \neq 0.$$

In diesem Falle reduziert sich also $X_4'f$ auf

$$X_4'f = \varepsilon_1 (p + yr).$$

Statt dieses $X_4'f$ können wir aber benutzen

$$X_4''f = \frac{1}{\varepsilon_1} X_4'f = p + yr$$

und erhalten dann folgende Gruppe

$$\boxed{q + xr, \quad yq + zr, \quad (xy - z)p + y^2 q + yzr, \quad p + yr.}$$

2. Setzen wir voraus

$$D^2 \equiv e_2^2 - 4e_1e_3 \neq 0,$$

$$c = \frac{-e_2 \pm \sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3}}{2e_1},$$

so können wir erreichen, dass ε_1 verschwindet, indem wir setzen

$$e_1b^2 - e_2ab + e_3a^2 = 0, \quad b = a\left\{\frac{e_2 \pm \sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3}}{2e_1}\right\}, \quad a \neq 0.$$

Setzen wir die Werte von b u. c in die Gleichung für ε_2 ein, so kommt

$$\varepsilon_2 = \pm\sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3} = \pm D \neq 0,$$

so dass $X_4'f$ die Form erhält

$$X_4'f = \pm D\{xp + zr\}$$

oder einfacher

$$X_4''f = \frac{1}{\pm D} X_4'f = xp + zr.$$

Wir haben folgende Gruppe

$$\boxed{q + xr, \quad yq + zr, \quad (xy - z)p + y^2q + yzr, \quad xp + zr.}$$

B. $\mu_1X_1f + \mu_2X_2f \neq 0, \quad X_3f = \varphi_1X_1f + \varphi_2X_2f.$

Es bestehen folgende Beziehungen

$$(X_1X_3) = (X_1\varphi_1 + \varphi_2)X_1f + X_1\varphi_2X_2f = 2X_2f,$$
$$(X_2X_3) = (X_2\varphi_1 - \varphi_1)X_1f + X_2\varphi_2X_2f = X_3f = \varphi_1X_1f + \varphi_2X_2f.$$

Hieraus folgt, weil zwischen X_1f u. X_2f keine lineare Relation bestehen soll:

$$X_1\varphi_1 = -\varphi_2, \quad X_1\varphi_2 = 2,$$
$$X_2\varphi_1 = 2\varphi_1, \quad X_2\varphi_2 = \varphi_2.$$

Hiernach sind φ_1 u. φ_2 sicher keine Constanten; sie seien zunächst unabhängig von einander

$$\alpha) \quad \vartheta(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0.$$

Unter dieser Voraussetzung können wir φ_1 als x_1, φ_2 als y_1, benutzen; z_1 dagegen sei die gemeinsame Lösung des zwei-

gliedrigen vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$, $(X_1 X_2) = X_1 f$, sodass

$$X_1 z_1 = 0, \quad X_2 z_1 = 0.$$

Führen wir x_1, y_1, z_1 als neue Veränderliche ein, so kommt

$$X_1 f = -yp + 2q, \quad X_2 f = 2xp + yq, \quad X_3 f = yxp + (2x + y^2)q.$$

α_a) $X_4 f$ sei durch keine lineare Relation mit $X_1 f$, $X_2 f$ verbunden, sondern habe die Form

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \zeta \neq 0.$$

Die Klammerrelationen liefern folgende Gleichungen

$$1. \quad -y \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \qquad 2. \quad -y \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

$$2x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \qquad 2x \frac{\partial \eta}{\partial x} + y \frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta,$$

$$yx \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (2x + y^2) \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \qquad yx \frac{\partial \eta}{\partial x} + (2x + y^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2(\xi + y\eta),$$

$$3. \quad -y \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\eta,$$

$$2x \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2\xi,$$

$$yx \frac{\partial \xi}{\partial x} + (2x + y^2) \frac{\partial \xi}{\partial y} = y \cdot \xi + x \cdot \eta.$$

Aus den Gleichungen 1. folgt, da die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$M = \begin{vmatrix} -y & 2 \\ 2x & y \\ yx & 2x + y^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= 4x + y^2, \\ \Delta_2 &= -y\Delta_1, \\ \Delta_3 &= x\Delta_1 \end{aligned}$$

wegen der Voraussetzung

$$\vartheta(\varphi_1, \varphi_2) = \vartheta(x_1 y) \neq 0$$

sämtlich von Null verschieden sind,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \qquad \zeta = \zeta(z).$$

Die ersten beiden Gleichungen von 2. und 3. liefern

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2\eta}{y^2 + 4x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{y \cdot \eta}{y^2 + 4x},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{4\xi + y \cdot \eta}{y^2 + 4x}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{2y\xi - 2x\eta}{y^2 + 4x}.$$

Diese Werte setzen wir in die noch übrigen Gleichungen ein und erhalten dabei:

$$\begin{aligned} y \cdot \eta + 2\xi &= 0, \\ -2x \cdot \eta + y \cdot \xi &= 0. \end{aligned} \qquad \varDelta_1 = y^2 + 4x \neq 0.$$

Hieraus folgt wegen $\varDelta_1 \neq 0$

$$\xi = 0, \quad \eta = 0.$$

$X_4 f$ hat also die Form

$$X_4 f = \zeta(z) r.$$

Bei Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = Z(z),$$

wo

$$Z(z) = \int \frac{dz}{\zeta(z)}$$

ist, erhalten wir zunächst die Gruppe in folgender Gestalt:

$$-yp + 2q, \quad 2xp + yq, \quad yxp + (y^2 + 2x)q, \quad r.$$

Vermöge der Transformation

$$x_1 = \frac{y}{2}, \qquad y_1 = -\frac{x}{2}, \qquad z_1 = z$$

erhält diese Gruppe aber die Form

$$\boxed{p + xq, \quad xp + 2yq, \quad (x^2 - y)p + xyq, \quad r.}$$

Die drei Transformationen

$$X_1 f = p + xq, \quad X_2 f = xp + 2yq, \quad X_3 f = (x^2 - y)p + xyq$$

bilden eine wohl bekannte projective Gruppe der Ebene (xy), die den Kegelschnitt

$$x^2 - 2y = 0$$

invariant lässt.

α_b) X_4f sei durch eine lineare Relation mit X_1f, X_2f verbunden, also

$$X_4f = \chi_1 X_1 f + \chi_2 X_2 f.$$

Wir bilden die Klammerausdrücke

$$(X_1X_4) = X_1\chi_1 X_1 f + X_1\chi_2 X_2 f + \chi_2(X_1X_2) = (X_1\chi_1 + \chi_2)X_1 f + X_1\chi_2 X_2 f = 0,$$
$$(X_2X_4) = X_2\chi_1 X_1 f - \chi_1(X_1X_2) + X_2\chi_2 X_2 f = (X_2\chi_1 - \chi_1)X_1 f + X_2\chi_2 X_2 f = 0,$$
$$(X_3X_4) = (\varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f, \chi_1 X_1 f + \chi_2 X_2 f) = (\chi_1\varphi_2 - 2\chi_2\varphi_1)X_1 f + (2\chi_1 + \varphi_2\chi_2)X_2 f = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{array}{lll} X_1\chi_2 = 0, & X_1\chi_1 = -\chi_2, & \varphi_2\chi_1 - 2\varphi_1\chi_2 = 0, \\ X_2\chi_2 = 0, & X_2\chi_1 = \chi_2, & 2\chi_1 + \varphi_2\chi_2 = 0, \end{array} \qquad \Delta \equiv \varphi_2^2 + 4\varphi_1.$$

Sollen χ_1 und χ_2 von Null verschieden sein, so muss

$$\Delta \equiv \varphi_2^2 + 4\varphi_1 = 0$$

sein. Dann folgt weiter

$$\chi_1 = \frac{2\varphi_1}{\varphi_2}\chi_2 = -\frac{\varphi_2\chi_2}{2}.$$

Wir nehmen φ_2 als x_1, als y_1 benutzen wir eine solche Function y_1, dass

$$X_1 y_1 = 0, \quad X_2 y_1 = 1$$

ist, und schliesslich als z_1 die Grösse χ_2, sobald, wie wir voraussetzen wollen,

$$\chi_2 \neq \text{const.}$$

Unter Einführung dieser von einander unabhängigen Functionen x_1, y_1, z_1 als neuer Veränderlicher erhalten wir

$$X_1 f = 2p, \quad X_2 f = xp + q, \quad X_3 f = \frac{x^2}{2}p + xq, \quad X_4 f = zq.$$

Führen wir schliesslich noch einmal neue Veränderliche ein

$$x_1 = \frac{x}{2}, \quad y_1 = \sqrt{e^y}, \quad z_1 = \frac{z}{2},$$

so erhält unsre Gruppe die Gestalt

$$\boxed{p, \quad xp + \frac{y}{2}q, \quad x^2p + xyq, \quad zyq.}$$

Ist andrerseits

$$\chi_2 = \text{const.},$$

so erhalten wir durch analoge Rechnungen die Gruppe

$$\boxed{p, \quad xp + \frac{y}{2}q, \quad x^2p + xyq, \quad yq.}$$

β) Es sei

$$\vartheta(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

$$X_4f = \xi p + \eta q + \zeta r, \quad \zeta \neq 0,$$

d. h. X_4f sei durch keine lineare Relation mit X_1f und X_2f verbunden. Die Beziehung zwischen φ_1, φ_2 lautet wie vorhin

$$4\varphi_1 + \varphi_2^2 = 0.$$

Durch Einführung derselben neuen Veränderlichen wie in Fall α_b erhalten wir zunächst

$$X_1f = 2p, \quad X_2f = xp + q, \quad X_3f = \frac{x^2}{2}p + xyq.$$

Für X_4f liefern die Klammerrelationen

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta(z), \quad \zeta = \zeta(z),$$

$$X_4f = \eta(z)q + \zeta(z)r.$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + Y(z), \quad z_1 = z + Z(z),$$

wobei

$$\eta(z) + \zeta(z)\frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \qquad \zeta(z)\frac{\partial Z}{\partial z} = 1$$

ist, geht X_4f über in

$$X_4f = r.$$

Führen wir schliesslich nochmals neue Veränderliche ein

$$x_1 = \frac{x}{2}, \quad y_1 = \sqrt{e^y}, \quad z_1 = z,$$

so erhält unsre Gruppe die Form

$$\boxed{p, \quad xp + \frac{y}{2}q, \quad x^2p + xyq, \quad r.}$$

C. $X_2 f = \varrho . X_1 f.$

Die Klammerausdrücke lehren, dass dann zugleich

$$X_3 f = \sigma . X_1 f$$

ist, und zwar stehen ρ u. σ in folgender Beziehung

$$\sigma = \varrho^2.$$

Aus $(X_1 X_2) = X_1 f$ folgt zunächst

$$X_1 \varrho = 1.$$

Führen wir die Function ρ (xyz), die ja sicher keine Constante ist, als neues x_1, die beiden von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung $X_1 f = 0$ als neues y_1, u. neues z_1 ein, so erhalten wir offenbar

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = xp, \quad X_3 f = x^2 p.$$

Für

$$X_4 f = \xi p + \eta q + \zeta r$$

ergeben die Klammerrelationen

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta(zy), \quad \zeta = \zeta(zy),$$
$$X_4 f = \eta(zy) q + \zeta(zy) r.$$

Unter Einführung neuer Veränderlicher

$$x_1 = x, \quad y_1 = Y(yz), \quad z_1 = Z(yz),$$

wo

$$\eta \frac{\partial Y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial Y}{\partial z} = 1,$$
$$\eta \frac{\partial Z}{\partial y} + \zeta \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

ist, erhalten wir folgende Gruppe der Ebene (xy)

$$\boxed{p, \quad xp, \quad x^2 p, \quad q.}$$

Die letzte Annahme

$$X_2 f = \varrho . X_1 f, \quad X_3 f = \sigma . X_1 f, \quad X_4 f = \tau . X_1 f$$

führt zu Widersprüchen.

Wir sind hiermit zu Ende und wollen sämtliche Gruppen noch einmal aufschreiben, wobei die Gruppen der Ebene besonders vermerkt werden mögen.

I. $(X_1X_2)=0,\quad (X_1X_3)=0,\quad (X_2X_3)=0,\quad (X_1X_4)=\alpha X_1f,$
$(X_2X_4)=\beta X_2f,\quad (X_3X_4)=\gamma X_3f.$

$p,\ q,\ r,\ \alpha xp+\beta yq+\gamma zr.$

$p,\ q,\ zp+z^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}q,\quad \alpha xp+\beta yq+(\alpha-\gamma)zr.$

$p,\quad q,\quad zp,\quad \alpha xp+\beta yq+(\alpha-\gamma)zr.$

$p,\quad zp,\quad yp,\quad \alpha xp+(\alpha-\gamma)yq+(\alpha-\beta)zr.$

$p,\quad yp,\quad y^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}}p,\quad \alpha xp+(\alpha-\beta)yq.$

II. $(X_1X_2)=0,\quad (X_1X_3)=0,\quad (X_2X_3)=0,\quad (X_1X_4)=\alpha X_1f,$
$(X_2X_4)=\beta X_2f,\quad (X_3X_4)=X_2f+\beta X_3f.$

$p,\quad q,\quad r,\quad \alpha xp+(\beta y+z)q+\beta zr.$

$p,\quad q,\quad e^z p+\frac{z}{\beta-\alpha}q,\quad \alpha xp+\beta yq+(\alpha-\beta)r.$

$p,\quad q,\quad zq,\quad \alpha xp+\beta yq-r.$

$p,\quad zp,\quad q,\quad (\alpha x+yz)p+\beta yq+(\alpha-\beta)zr.$

$p,\quad zp,\quad yp,\quad \alpha xp+((\alpha-\beta)y-z)q+(\alpha-\beta)zr.$

$p,\quad e^y p,\quad \frac{ye^y}{\beta-\alpha}p,\quad \alpha xp+(\alpha-\beta)q.$

III. $(X_1X_2)=0,\quad (X_1X_3)=0,\quad (X_2X_3)=0,\quad (X_1X_4)=0,$
$(X_2X_4)=0,\quad (X_3X_4)=X_2f.$

$p,\quad q,\quad r,\quad zq.$

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad yzp + \eta(z)q.}$$

$\eta(z)$ willkürlich.

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad -zq.}$$

IV. $(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_4) = \alpha X_1 f,$
$(X_2X_4) = \alpha X_2 f, \quad (X_3X_4) = X_2 f + \alpha X_3 f.$

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad \alpha(xp + yq + zr) + zq.}$$

$$\boxed{p, \quad q, \quad zq, \quad \alpha(xp + yq) - r.}$$

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad (\alpha x + yz)p + \alpha yq.}$$

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad \alpha xp - zq.}$$

V. $(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_4) = X_1 f,$
$(X_2X_4) = X_1 f + X_2 f, \quad (X_3X_4) = X_2 f + X_3 f.$

$$\boxed{p, \quad q, \quad r, \quad (x + y)p + (y + z)q + zr.}$$

$$\boxed{p, \quad q, \quad \frac{-z^2}{2}p + zq, \quad (x + y)p + yq - r.}$$

$$\boxed{p, \quad zp, \quad q, \quad (x + yz)p + yq - r.}$$

$$\boxed{p, \quad zp, \quad yp, \quad xp - zq - r.}$$

$$\boxed{p, \quad yp, \quad \frac{y^2}{2}p, \quad xp - q.}$$

VI. $(X_1X_2) = (X_1X_3) = (X_2X_3) = (X_1X_4) = (X_2X_4) = (X_3X_4) = 0.$

$$\boxed{p, \quad q, \quad zp + \tilde{\eta}(z)q, \quad \xi_1(z)p + \eta_1(z)q.}$$

$\tilde{\eta}(z)$ willkürlich, $\xi_1(z)$, $\eta_1(z)$ willkürlich, aber nicht beide zugleich $=$ const.

$$\boxed{p, \quad q, \quad zq, \quad \xi(z)p + \eta(z)q.}$$

$\xi(z)$, $\eta(z)$ willkürlich, aber nicht beide zugleich $=$ const.

$p, \quad zp, \quad yp, \quad \zeta(yz)p.$

$\zeta(yz)$ **willkürlich,** $\neq$ **const.**

$p, \quad yp, \quad \varphi(y)p, \quad \psi(y)p.$

$\varphi(y) \neq \psi(y) \neq$ **const.**

VII. $(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_4) = X_1f,$
$(X_2X_4) = X_2f, \quad (X_3X_4) = X_3f.$

$p, \quad q, \quad r, \quad xp + yq + zr.$

$p, \quad q, \quad zp + \psi(z)q, \quad xp + yq.$

$\psi(z)$ **willkürlich.**

$p, \quad q, \quad zp, \quad xp + yq.$

$p, \quad zp, \quad yp, \quad xp.$

$p, \quad zq, \quad \varphi(z)p, \quad xp + q.$

$\varphi(z)$ **willkürlich,** $\neq$ **const.**

$p, \quad yp, \quad \zeta(y)p, \quad xp.$

$\zeta(y)$ **willkürlich,** $\neq$ **const.**

VIII. $(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_4) = 0,$
$(X_2X_4) = X_1f, \quad (X_3X_4) = X_2f.$

$p, \quad q, \quad r, \quad yp + zq.$

$p, \quad q, \quad -\frac{z^2}{2}p + zq, \quad yp - r.$

$p, \quad zp, \quad q, \quad yzp - r.$

$p, \quad zp, \quad yp, \quad -(zq + r).$

$p, \quad yp, \quad \frac{y^2}{2}p, \quad -q.$

IX. $(X_1X_2)=0$, $(X_1X_3)=0$, $(X_2X_3)=0$, $(X_1X_4)=\alpha X_1 f$,
$(X_2X_4)=\alpha X_2 f$, $(X_3X_4)=\gamma X_3 f$.

p, q, r, $\alpha(xp+yq)+\gamma zr$.

p, q, $zp+\varkappa zq$, $\alpha(xp+yq+zr)-\gamma zr$.

$\varkappa \neq 0$, **wesentlich.**

p, q, zp, $\alpha(xp+yq+zr)-\gamma zr$.

p, zp, q, $\alpha xp+\gamma yq$.

p, zp, yp, $\alpha(xp+yq)-\gamma yq$.

X. $(X_1X_2)=0$, $(X_1X_3)=0$, $(X_2X_3)=X_1 f$, $(X_1X_4)=2X_1 f$,
$(X_2X_4)=X_2 f$, $(X_3X_4)=2X_2 f+X_3 f$.

p, $-\frac{z}{2}p+q$, $\frac{y}{2}p+2q+r$, $2xp+(y+2z)q+zr$.

p, q, $yp+zq$, $2xp+yq-2r$.

p, zp, $-r$, $(2x-z^2)p+q+zr$.

p, yp, $-q$, $(2x-y^2)p+yq$.

XI. $(X_1X_2)=0$, $(X_1X_3)=0$, $(X_2X_3)=X_1 f$, $(X_1X_4)=cX_1 f$,
$(X_2X_4)=X_2 f$, $(X_3X_4)=(c-1)X_3 f$. $c \neq 1$.

p, $zp+\frac{1}{c}q$, $yp+\frac{1-c}{c}r$, $cxp+yq+(1-c)r$.

p, $yp+q+y^{-1}zr$, $yp+yr$, y^2p+yq.

p, q, $yp+zq$, $cxp+yq+(2-c)zr$.

p, q, yp, $cxp+yq+r$.

p, q, yp, $cxp+yq$.

$$p, \quad zp, \quad -r, \quad cxp + q + (c-1)zr.$$

$$p, \quad yp, \quad -q, \quad cxp + (c-1)yq.$$

XII. $(X_1X_2)=0, \quad (X_1X_3)=0, \quad (X_2X_3)=X_1f, \quad (X_1X_4)=X_1f,$
$(X_2X_4)=X_2f, \quad (X_3X_4)=0.$

$$p, \quad q, \quad yp + r, \quad xp + yq + \varkappa r.$$

$\varkappa \neq 0$, wesentlich.

$$p, \quad q, \quad yp + r, \quad xp + yq.$$

$$p, \quad q, \quad yp + zq, \quad xp + yq + zr.$$

$$p, \quad q, \quad yp, \quad xp + yq + r.$$

$$p, \quad q, \quad yp, \quad xp + yq.$$

$$p, \quad zp, \quad -r, \quad xp + q.$$

$$p, \quad yp, \quad -q, \quad xp.$$

XIII. $(X_1X_2)=0, \quad (X_1X_3)=0, \quad (X_2X_3)=X_2f, \quad (X_1X_4)=X_1f,$
$(X_2X_4)=0, \quad (X_3X_4)=0.$

$$p, \quad q, \quad yq + r, \quad xp + \varkappa r.$$

$\varkappa \neq 0$, wesentlich.

$$p, \quad q, \quad yq + zr, \quad xp + zq.$$

$$p, \quad q, \quad yq + r, \quad xp.$$

$$p, \quad q, \quad zp + yq, \quad xp + zr.$$

$$p, \quad q, \quad yq, \quad xp + r.$$

$$p, \quad q, \quad yq, \quad xp.$$

$$p, \quad zp, \quad -zr, \quad xp+q+zr.$$

$$p, \quad yp, \quad -yq, \quad xp+yq.$$

XIV. $(X_1X_2)=X_1f, \quad (X_1X_3)=2X_2f, \quad (X_2X_3)=X_3f,$
$(X_1X_4)=(X_2X_4)=(X_3X_4)=0.$

$$q+xr, \quad yq+zr, \quad (xy-z)p+y^2q+yzr, \quad p+yr.$$

$$q+xr, \quad yq+zr, \quad (xy-z)p+y^2q+yzr, \quad xp+zr.$$

$$p+xq, \quad xp+2yq, \quad (x^2-y)p+xyq, \quad r.$$

$$p, \quad xp+\frac{y}{2}q, \quad x^2p+xyq, \quad yzq.$$

$$p, \quad xp+\frac{y}{2}q, \quad x^2p+xyq, \quad yq.$$

$$p, \quad xp+\frac{y}{2}q, \quad x^2p+xyq, \quad r.$$

$$p, \quad xp, \quad x^2p, \quad q.$$

Inhaltsverzeichnis.

Vita.

Ich, Johann Friedrich Heinrich Richard Koch, evangelisch-lutherischer Confession, wurde am 27. Juni 1875 als Sohn des Zugführers Hermann Koch zu Leipzig geboren. Nachdem ich hier auf der Volksschule bis Ostern 1885 den Elementarunterricht erhalten hatte, besuchte ich das Königl. Gymnasium. Nach bestandener Reifeprüfung bezog ich Ostern 1894 die Universität Leipzig, um mich dem Studium der Mathematik zu widmen. Während meiner Studienzeit, die ich leider für das Sommersemester 1896 wegen Krankheit unterbrechen musste, hörte ich bis jetzt Vorlesungen bei den Herren Professoren und Docenten: Drude, Eckert, Engel, Heinze, Hettner, Hofman, Lie, Mayer, von Oettingen, Ratzel, Richter, Scheffers, von Strümpell, Wiedemann, Wislicenus, Wundt und besuchte die Seminarien der Herren: Eckert, Engel, Lie, Ratzel, Richter, Scheffers, Wiedemann.

